Nouvelles annales de mathématiques

Gambey

Solution de la question proposée au concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 342-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__342_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1888;

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Rouen.

I. — MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Soient deux points A *et* A′ *et deux droites* D *et* D′, *parallèles à* AA′ *et équidistantes de cette droite :*

1° *Démontrer qu'à tout point* P, *pris sur la droite* D, *correspond un point* P′, *pris sur* D′, *tel que la droite* PP′ *soit tangente aux cercles* S *et* S′ *circonscrits l'un au triangle* PAA′, *l'autre au triangle* P′AA′;

2° *Trouver le lieu décrit par la projection de chacun des points* A *et* A′ *sur la droite* PP′;

3° *Construire les droites* PP′ *qui passent par un point donné* Q;

4° *Démontrer que les cercles* S *et* S′ *se coupent sous un angle constant ;*

5° *Soit* O *le milieu du segment* AA'; *étudier les variations de l'angle* $\widehat{POP'}$.

1° Soit C le centre du cercle déterminé par les trois points A, A', P : une perpendiculaire élevée en P sur CP détermine la tangente au cercle C; cette droite coupe AA' en I et la droite D' en P'.

De $\overline{IA}.\overline{IA'} = \overline{IP}^2$, on tire $\overline{IA}.\overline{IA'} = \overline{IP'}^2$, à cause de $IP = IP'$; donc PP' est tangente au cercle de centre C' qui passe par les trois points A, A', P'.

2° Projetons A et A' en H et H' sur PP'; le point P en K sur AA'; traçons A'H, et remarquons que la projection de A'H sur AH est égale à A'H' (le point A' est supposé entre le point A et la droite PP'). Les triangles semblables AIH, A'IH', PIK donnent

$$\frac{AH}{AI} = \frac{A'H'}{A'I} = \frac{PK}{PI};$$

d'où l'on tire

$$\frac{AH.A'H'}{AI.A'I} = \frac{\overline{PK}^2}{\overline{PI}^2},$$

et, comme les dénominateurs sont égaux, il en est de même des numérateurs; donc le produit $\overline{AH}.\overline{A'H'}$ est constant et égal au carré de la demi-distance des parallèles D et D'.

Ceci obtenu, le triangle AA'H donnant l'égalité

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{A'H}^2 - 2\overline{AH}.\overline{A'H'},$$

on en conclut que la somme $\overline{AH}^2 + \overline{A'H}^2$ est aussi constante.

Le lieu géométrique de H est donc une circonférence qui a le point milieu O de AA′ pour centre. Le point H′ décrit le même lieu. Le rayon de ce cercle a pour valeur

$$\sqrt{\frac{\overline{AA'}^2}{4} - \overline{PK}^2}.$$

Remarque. — De ce qui précède, on conclut que la droite PP′ est constamment tangente à une ellipse qui a pour foyers les points A et A′, et dont le cercle précédent est le cercle principal, ce qui suffit à la déterminer. Elle est tangente aux droites D et D′.

3° La construction des droites PP′ qui passent par un point donné Q revient à mener par ce point des tangentes à l'ellipse que nous venons de considérer ; ou bien à joindre le point Q aux points d'intersection du cercle principal de cette ellipse avec la circonférence qui aurait AQ ou A′Q pour diamètre. Le problème est donc impossible quand le point Q est situé à l'intérieur de l'ellipse.

4° Soient B et B′ les points où les droites D et D′ sont coupées par leur perpendiculaire commune menée par le milieu de AA′. Traçons AC, AC′, AB, AB′. Si l'on prend BC et B′C′ pour bases des triangles ABC, AB′C′, ces triangles auront même hauteur et seront proportionnels à BC, B′C′. Mais les triangles semblables BCP, B′C′P′ donnent

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CP}{C'P'} = \frac{CA}{C'A} = \frac{\overline{CA} \times \overline{AB}}{C'A \times \overline{AB'}},$$

car

$$AB = AB'.$$

On a donc

$$\frac{\text{triangle } ABC}{\text{triangle } AB'C'} = \frac{\overline{CA} \times \overline{AB}}{\overline{C'A} \times AB'},$$

ce qui exige que les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$ soient égaux ou supplémentaires. Or ils sont évidemment aigus tous les deux, donc ils sont égaux.

Il en résulte que les angles $\widehat{CAC'}$ et $\widehat{BAB'}$ sont aussi égaux. Donc les cercles de centres C et C' se coupent sous un angle constant, qui est le supplément de l'angle $\widehat{BAB'}$.

5° Traçons enfin OP et OP'. La double symétrie de l'ellipse à laquelle la droite PP' doit rester tangente montre qu'il suffit d'étudier la variation de l'angle $\widehat{POP'}$, de la valeur qu'il a quand la droite PP' est perpendiculaire à AA', à celle qu'il prend quand cette droite devient parallèle à AA', tout en restant toujours tangente à l'ellipse. La demi-valeur initiale de cet angle étant toujours moindre que 45°, l'angle $\widehat{POP'}$ part d'une valeur moindre que 90°, et il varie d'une manière continue de cette valeur à 90°, valeur qu'il prend quand OP a la direction AA', et OP' la direction perpendiculaire, car alors l'un des cercles qui passent en A et en A' se réduit à la droite AA' prolongée indéfiniment.

La même question a été résolue par M. G. Leinckugel, élève du lycée de Douai, et par M. G.-H. Niewenglowski, élève de Mathématiques élémentaires au lycée Louis-le-Grand (classe de M. Humbert).

II. — Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde S *et deux points* P *et* P', *et l'on considère les ellipses* C *et* C' *suivant lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les plans polaires des points* P *et* P' :

1° *Démontrer que les coniques* C *et* C' *et les points*

P *et* P′ *sont situés sur une quadrique* Σ *qui est en général unique;*

2° *Discuter cette quadrique en supposant que le point* P′ *se déplace dans l'espace, le point* P *et l'ellipsoïde* S *restant fixes;*

3° *Les points* P *et* P′ *étant supposés fixes et situés de façon que la quadrique* Σ *soit indéterminée, trouver le lieu du centre de cette quadrique;*

4° *En supposant que les points* P *et* P′ *se déplacent de façon que la quadrique* Σ *soit une sphère, trouver la surface enveloppe* E *de cette sphère;*

5° *Peut-on déterminer un point* A *tel que la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface* E, *en prenant le point* A *pour pôle, soit un cône du second degré?*

1° Soit l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes

$$(S) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$P(\alpha, \beta, \gamma)$ et $P'(\alpha', \beta', \gamma')$ étant les deux points donnés, leurs plans polaires ont pour équations

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} + \frac{\gamma' z}{c^2} - 1 = 0,$$

et toute quadrique passant par les points P et P′ et par les coniques, intersections de l'ellipsoïde S et des plans polaires des points P et P′, a une équation de la forme

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) \\ &+ \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} + \frac{\gamma' z}{c^2} - 1\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

à laquelle il faut joindre les deux conditions

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\\ &\quad+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)=0, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda\left(\frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\gamma'^2}{c^2}-1\right)\\ &\quad+\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\gamma'^2}{c^2}-1\right)=0. \end{aligned} \right.$$

Supposons d'abord que les deux points P et P′ ne soient pas situés sur l'ellipsoïde donné. Alors on pourra diviser l'équation (1) par $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1$, et l'équation (2) par $\frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\gamma'^2}{c^2}-1$, et ces deux équations se réduiront à l'équation unique

$$\lambda+\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1=0,$$

qui détermine une seule valeur de λ. L'équation (A) devient alors

$$(\mathrm{B})\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\\ &\quad-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}+\frac{\gamma' z}{c^2}-1\right)=0. \end{aligned} \right.$$

Si l'un des points P ou P′ est situé sur l'ellipsoïde donné, l'une des équations (1) et (2) est vérifiée identiquement et l'autre donne la même valeur de λ, déjà obtenue.

Mais si les deux points P et P′ sont tous les deux situés sur l'ellipsoïde donné, les équations (1) et (2) sont vérifiées identiquement, quel que soit λ : il y a donc, dans ce cas, une infinité de quadriques répondant à la question, tandis qu'il n'y en a qu'une seule dans les deux autres cas.

2° Pour discuter plus commodément l'équation (B), je rapporte momentanément l'ellipsoïde S à trois diamètres conjugués dont l'un, l'axe des z, passe au point P. Appelant a', b', c' les trois demi-diamètres conjugués, l'équation à écrire se déduira de l'équation (B), en faisant $\alpha = \beta = 0$, et supposant que α', β', γ' et γ soient les nouvelles coordonnées des points P' et P. Ce sera donc

$$(\mathrm{B})' \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\gamma\gamma'}{c'^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1\right) \\ &\quad - \left(\frac{\gamma z}{c'^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\beta' y}{b'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Je suppose les points P et P' non situés sur l'ellipsoïde et, par suite, qu'il n'y a qu'une quadrique Σ satisfaisant aux conditions énoncées.

Toutes les quadriques qu'on obtient en faisant varier seulement le point P' ont une direction commune de diamètres conjugués; c'est la direction de l'axe des z, et les équations de ce diamètre, pour une quadrique déterminée, sont données en égalant à zéro les dérivées du premier membre de (B)' par rapport à x et à y.

On obtient ainsi

$$2(\gamma\gamma' - c'^2)x - (\gamma z - c'^2)\alpha' = 0,$$
$$2(\gamma\gamma' - c'^2)y - (\gamma z - c'^2)\beta' = 0;$$

d'où

$$x = \frac{\gamma z - c'^2}{2(\gamma\gamma' - c'^2)}\alpha', \qquad y = \frac{\gamma z - c'^2}{2(\gamma\gamma' - c'^2)}\beta'.$$

Ces valeurs de x et de y substituées dans l'équation (B)' conduisent, pour déterminer les z des points d'intersection de la quadrique avec son diamètre parallèle à Oz, à l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma^2\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{4(\gamma\gamma'-c'^2)}{\gamma^2}\right]z^2\\ &\quad-2c'^2\gamma\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{2(\gamma\gamma'-c'^2)(\gamma+\gamma')}{c'^2\gamma}\right]z\\ &\qquad+c'^4\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{4(\gamma\gamma'-c'^2)}{c'^4}\gamma\gamma'\right]=0.\end{aligned}\right.$$

En écartant le cas de $\gamma\gamma'-c'^2=0$, qui donnerait pour la quadrique Σ deux plans, ceux des coniques C et C', on peut écrire ainsi la condition de réalité des racines de l'équation (3)

$$(4)\qquad (c'^2-\gamma^2)\left[\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{(\gamma'-\gamma)^2}{c'^2-\gamma^2}\right]=0.$$

Si l'on regarde α', β', γ' comme des coordonnées courantes, les équations

$$\mathrm{H}=\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{(\gamma'-\gamma)^2}{c'^2-\gamma^2}=0,$$

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha'^2}{a'^2}+\frac{\beta'^2}{b'^2}+\frac{4(\gamma\gamma'-c'^2)}{\gamma^2}=0$$

représentent : la première, un cône circonscrit à l'ellipsoïde donné suivant la conique C et ayant le point P pour sommet; la seconde, un paraboloïde [redacted]n-gent au plan de la conique C au point où [redacted]est percé par l'~~axe des~~ [redacted]inscrit dans le cône H suivant la courbe déterminée sur ce cône par le plan

$$(2\gamma^2-c'^2)\gamma'-c'^2\gamma=0.$$

Cela posé, distinguons deux cas.

I. — *Le point* P *est extérieur à l'ellipsoïde donné.*

On a alors

$$c'^2-\gamma^2<0.$$

La condition (4) montre que, si le point P' est à l'extérieur du cône H, l'équation (3) aura ses racines imaginaires, et par conséquent la quadrique Σ sera un *hyperboloïde à une nappe*. Si le point P' est sur le cône H, les racines de (3) sont égales et Σ représente un cône. Mais si le point P' est à l'intérieur du cône H, l'équation (3) aura ses racines réelles et distinctes. Il faudra alors examiner si ces racines sont toutes les deux supérieures ou inférieures à $\frac{c'^2}{\gamma}$, ou bien si elles comprennent entre elles cette quantité.

Or la substitution à z, dans l'équation (3), de $\frac{c'^2}{\gamma_1}$, conduit à l'expression

$$\frac{4(\gamma_1\gamma' - c'^2)}{\gamma_1^2}(\gamma_1^2 - c'^2),$$

qui est positive. Donc, si le point P' est situé à l'intérieur du paraboloïde K, la quantité $\frac{c'^2}{\gamma_1}$ sera comprise entre les racines de (3), et la quadrique Σ sera un *ellipsoïde réel*, tandis que, si le point P' est extérieur au même paraboloïde, $\frac{c'^2}{\gamma_1}$ sera extérieure aux racines de (3) et Σ sera un *hyperboloïde à deux nappes*.

Si le point P' vient sur le paraboloïde K, l'équation (3) acquiert une racine infinie, et Σ devient un *paraboloïde elliptique*.

II. — *Le point* P *est intérieur à l'ellipsoïde donné*.

Alors on a

$$c'^2 - \gamma_1^2 > 0:$$

les racines de (3) sont toujours réelles et distinctes. La discussion est analogue à la précédente. Ainsi la substitution de $\frac{c'^2}{\gamma_1}$ à la variable z dans (3) donnant ici un résultat négatif, si le point P′ est intérieur au paraboloïde K (qui n'est pas le même que dans le cas précédent), Σ sera un *hyperboloïde à deux nappes,* et si ce point est extérieur à K, la quadrique Σ sera un *ellipsoïde réel.* Ce sera encore un *paraboloïde elliptique* si le point P′ est situé sur K.

Les cas particuliers se discutent facilement.

3° Je conserve encore le même système d'axes, sauf que je suppose que le plan des zx contient le point P′, d'où $\beta' = 0$.

La quadrique Σ est indéterminée, avons-nous dit, quand les deux points P et P′ sont situés sur l'ellipsoïde donné. On doit donc supposer ici

$$(5) \qquad \gamma = c' \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha'^2}{a'^2} + \frac{\gamma'^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

et l'équation générale des quadriques Σ sera

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1\right) + \frac{z - c'}{c'}\left(\frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1\right) = 0.$$

En égalant à zéro les dérivées du premier membre de cette équation par rapport à x, y et z, on obtient

$$\frac{2\lambda x}{a'^2} + \frac{z - c'}{c'}\,\frac{\alpha'}{a'^2} = 0,$$

$$\frac{2\lambda y}{b^2} = 0,$$

$$\frac{2\lambda z}{c'} + \frac{z - c'}{c'}\,\frac{\gamma'}{c'} + \frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1 = 0.$$

et, pour toute valeur de λ différente de zéro, on voit que le lieu cherché est tout entier dans le plan des zx.

En éliminant λ, on arrive à l'équation

$$\frac{c'^2}{a'^2}\alpha' x^2 - \alpha' z^2 + 2\gamma' zx - c'(\gamma' - c)x + c'\alpha' z = 0.$$

Si l'on multiplie par α' et si l'on remplace $\frac{\alpha'^2}{a'^2}$ par $1 - \frac{\gamma'^2}{c'^2}$, on peut la mettre sous la forme

$$[(c' + \gamma')x - \alpha' z][(c' - \gamma')x + \alpha' z - c'\alpha'] = 0:$$

et elle représente la droite qui joint l'origine au milieu du segment PP', et la droite PP' elle-même.

Remarque. — Les quadriques Σ sont toutes tangentes aux deux plans

$$z - c' = 0, \qquad \frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1 = 0,$$

aux points P et P' de l'ellipsoïde donné. Parmi ces quadriques se trouve évidemment l'ellipsoïde S; donc l'origine devait faire partie du lieu obtenu. L'ensemble des deux plans tangents en P et P' à l'ellipsoïde constituant une variété des quadriques Σ, on doit trouver leur intersection comme faisant partie du lieu. Mais, comme cette variété ne peut s'obtenir qu'en faisant $\lambda = 0$, dans l'équation générale des quadriques Σ, on ne pouvait pas trouver cette partie du lieu par la méthode précédente. Il faut faire $\lambda = 0$ dans les trois équations du centre. Alors on n'a plus nécessairement $y = 0$, et l'on obtient en effet les deux équations

$$z - c' = 0, \qquad \frac{\alpha' x}{a'^2} + \frac{\gamma' z}{c'^2} - 1 = 0,$$

qui déterminent l'intersection cherchée.

4° Je reprends les coordonnées rectangulaires, et, par suite, l'équation (B), obtenue en supposant que les points P et P' ne soient situés ni l'un ni l'autre sur l'ellipsoïde S.

Cette équation développée devient

$$\left(\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{y^2}{b^2}$$
$$+\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}-1\right)\frac{z^2}{c^2}$$
$$-\frac{\beta\gamma'+\gamma\beta'}{b^2c^2}yz-\frac{\alpha\gamma'+\gamma\alpha'}{c^2a^2}zx-\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{a^2b^2}xy$$
$$+\frac{\alpha+\alpha'}{a^2}x+\frac{\beta+\beta'}{b^2}y+\frac{\gamma+\gamma'}{c^2}z-\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}\right)=0.$$

Elle représentera une sphère si l'on a

$$\left(\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{1}{a^2}=\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}-1\right)\frac{1}{b^2}$$
$$=\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}-1\right)\frac{1}{c^2};$$
$$\beta\gamma'+\gamma\beta'=\alpha\gamma'+\gamma\alpha'=\alpha\beta'+\beta\alpha'=0.$$

Supposons que l'on ait $a>b>c$. Il faudra faire $\beta=\beta'=0$, ce qui est, du reste, tout indiqué par ce fait que les ellipses C et C' devront être des cercles.

On obtient facilement les expressions de α', γ' et γ en fonction de α, et l'on a

$$\alpha'=\frac{a^2n^2}{\alpha(a^2+c^2-b^2)},\qquad \gamma=\frac{lc}{an}\alpha,\qquad \gamma'=\frac{-acln}{\alpha(a^2+c^2-b^2)},$$

en posant, pour abréger,

$$b^2-c^2=l^2,\qquad a^2-c^2=m^2,\qquad a^2-b^2=n^2,$$

et en remarquant que ces différences sont toutes positives.

L'équation de la sphère devient alors

$$na^2c(x^2+y^2+z^2)-nc[(a^2+c^2-b^2)\alpha^2+n^2a^2]x$$
$$-al[(a^2+c^2-b^2)\alpha^2-n^2a^2]z$$
$$+na^2c(n^2-l^2)\alpha=0;$$

et, en ordonnant par rapport à α,

$$\begin{aligned}(a^2+c^2-b^2)(ncx+alz)\alpha^2&\\ -na^2c(x^2+y^2+z^2+n^2-l^2)\alpha&\\ +a^2n^2(ncx-alz)&=0.\end{aligned}$$

En exprimant que cette équation en α a ses racines égales, on aura l'enveloppe cherchée. On obtient ainsi

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{aligned}&a^2c^2(x^2+y^2+z^2+n^2-l^2)^2\\ &\quad-4(a^2+c^2-b^2)(c^2n^2x^2-a^2l^2z^2)=0.\end{aligned}\right.$$

Cette enveloppe est donc une surface du quatrième ordre qui admet le cercle de l'infini pour ligne double; c'est une des *anallagmatiques* de M. Moutard, c'est-à-dire une de ces surfaces qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation par rayons vecteurs réciproques convenablement choisie, et l'on sait qu'elles possèdent cette propriété par rapport à cinq pôles différents. C'est aussi une des surfaces étudiées sous le nom de *cyclides*, par M. Darboux, dans son Mémoire *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*.

5° Proposons-nous de trouver un pôle tel que la transformée de (E) par rayons vecteurs réciproques soit un cône du second degré. Les formules de transformation sont

$$x=\frac{K^2}{R^2}X,\qquad y=\frac{K^2}{R^2}Y,\qquad z=\frac{K^2}{R^2}Z;$$

$$X^2+Y^2+Z^2=R^2,\qquad x^2+y^2+z^2=r^2;\qquad Rr=K^2.$$

Portons l'origine des coordonnées au point $A(x_0, y_0, z_0)$; l'équation (E) deviendra

$$\begin{aligned}&a^2c^2[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2+n^2-l^2]^2\\ &\quad-4(a^2+c^2-b^2)[n^2c^2(x+x_0)^2-a^2l^2(z+z_0)^2]=0.\end{aligned}$$

Développant et employant les formules ci-dessus, cette équation devient

$$
\begin{aligned}
&[a^2c^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2+n^2-l^2)^2\\
&\quad -4(a^2+c^2-b^2)(n^2c^2x_0^2-a^2l^2z_0^2](X^2+Y^2+Z^2)^2\\
&\quad +4K^2[a^2c^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2+n^2-l^2)(x_0X+y_0Y+z_0Z)\\
&\qquad\qquad +2(a^2+c^2-b^2)(n^2c^2x_0X-a^2l^2z_0Z)](X^2+Y^2+Z^2)\\
&\quad +2a^2c^2K^4(x_0^2+y_0^2+z_0^2+n^2-l^2)(X^2+Y^2+Z^2)\\
&\quad +a^2c^2K^4(2x_0X+2y_0Y+2z_0Z+K^2)^2\\
&\qquad\qquad -4K^4(a^2c^2-b^2)(n^2c^2X^2-a^2l^2Z^2)=0.
\end{aligned}
$$

On aperçoit facilement la solution

$$x_0=0, \qquad z_0=0, \qquad y_0^2+n^2-l^2=0.$$

Elle ne sera réelle que si l'on a

$$l^2>n^2,$$

c'est-à-dire

$$2b^2>a^2+c^2.$$

L'équation précédente se réduit alors à

$$
\begin{aligned}
&4(a^2+c^2-b^2)(n^2c^2X^2-a^2l^2Z^2)\\
&\qquad -a^2c^2(K^2\pm 2\sqrt{l^2-n^2}\,Y)^2=0
\end{aligned}
$$

et représente bien un cône du second degré, dont le sommet est au point ayant pour coordonnées

$$0, \quad \frac{\pm K^2}{2\sqrt{l^2-n^2}} \quad \text{et} \quad 0.$$

Il y a même deux solutions, symétriques par rapport au plan des zx.

III. — Analyse et applications.

Théorie. — *Démontrer que, si l'aire d'une portion continue de surface Σ limitée par un contour fermé et donné est la plus petite possible, la somme des rayons de courbure principaux est nulle aux divers points de la portion de surface considérée.*

Définition des surfaces minima. Intégration de leur *équation aux dérivées partielles. Formules de Monge. Formules de M. Weierstrass.*

Application. — 1° *Trouver la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique la cycloïde définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = a(v - \sin v),$$
$$y = a(1 - \cos v),$$
$$z = 0.$$

2° *Indiquer la forme de la surface; montrer que le plan des xy est un plan de symétrie et que les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement sont des axes de symétrie de cette surface;*

3° *Montrer que la surface peut être coupée par une infinité de plans suivant des paraboles du second degré;*

4° *Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface. Démontrer qu'un plan, perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs de cette courbe, coupe la surface suivant une ligne de courbure.*

Pour la théorie, voir l'Ouvrage de M. Darboux : *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Voici la solution du problème donné comme application.

Les formules de M. Weierstrass sont

$$x = \frac{1}{2}\int(1 - u^2)F(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1 - u_1^2)F_1(u_1)\,du_1,$$
$$y = \frac{i}{2}\int(1 + u^2)F(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1 + u_1^2)F_1(u_1)\,du_1,$$
$$z = \int uF(u)\,du + \int u_1F_1(u_1)\,du_1.$$

et l'on sait que, pour qu'elles représentent une surface réelle, il faut que les variables u et u_1 soient imaginaires conjuguées ainsi que les fonctions $F(u)$ et $F_1(u_1)$. De plus, les intégrations doivent s'effectuer suivant des chemins imaginaires conjugués.

Cela posé, les quantités u, u_1, $F(u)$, $F_1(u_1)$ deviennent, pour un point quelconque de la cycloïde donnée, des fonctions de la variable réelle v, et, pour exprimer que la cycloïde est une ligne géodésique de la surface inconnue, il faut écrire que la normale à cette surface en un point quelconque de la cycloïde est contenue dans le plan des xy. Or les cosinus des angles que fait cette normale avec les axes sont proportionnels aux binômes

$$u - u_1,\quad u_1 - u \quad \text{et} \quad uu_1 - 1.$$

On doit donc poser $uu_1 - 1 = 0$; d'où

$$u_1 = \frac{1}{u},\qquad \frac{du_1}{dv} = \frac{-1}{u^2}\frac{du}{dv}.$$

Substituons à u_1 la valeur $\frac{1}{u}$ dans les formules de Weierstrass, et identifions, pour un point de la cycloïde, avec les équations de cette courbe; puis différentions les équations ainsi formées. Nous aurons

$$(1 - u^2)\frac{du}{dv}\left[F(u) + \frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 2a(1 - \cos v),$$

$$i(1 + u^2)\frac{du}{dv}\left[F(u) + \frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 2a\sin v,$$

$$\frac{du}{dv}\left[F(u) - \frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{u^4}F_1\left(\frac{1}{u}\right) = F(u),$$

$$(1 - u^2)F(u)\frac{du}{dv} = a(1 - \cos v),$$

et

$$i(1+u^2)F(u)\frac{du}{dv} = a\sin v,$$

$$F(u)\frac{du}{dv} = \frac{a(1-\cos v)}{1-u^2} = -i\frac{a\sin v}{1+u^2}.$$

L'égalité formée par les deux derniers rapports, nécessaire pour que les équations précédentes soient compatibles, détermine u en fonction de v. On en tire

$$\tang\frac{v}{2} = -i\frac{1-u^2}{1+u^2};$$

puis

$$u^2 = \frac{\cos\frac{v}{2} - i\sin\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2} + i\sin\frac{v}{2}} = e^{-vi};$$

d'où

$$2\log u = -vi, \qquad 2\frac{du}{u} = -i\,dv, \qquad dv = 2i\frac{du}{u}.$$

D'autre part, on trouve facilement

$$1-\cos v = 2\sin\frac{2v}{2} = -\frac{(1-u^2)^2}{2u^2}.$$

L'équation

$$F(u)\frac{du}{dv} = a\frac{(1-\cos v)}{1-u^2}$$

devient alors

$$F(u) = -i\frac{a(1-u^2)}{u^3}.$$

La fonction $F(u)$ étant déterminée, la fonction $F_1(u_1)$ l'est par cela même, puisqu'elle doit être imaginaire conjuguée de $F(u)$.

Elle est du reste inutile, et l'on a, pour les équations différentielles de la surface cherchée,

$$x = -aRi\int \frac{(1-u^2)^2}{u^3}\,du,$$

$$y = aR\int \frac{1-u^4}{u^3}\,du,$$

$$z = -2aRi\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du,$$

R désignant la partie réelle de la fonction devant laquelle cette lettre est placée. L'intégration donne

$$x = -\frac{a}{2}Ri\left[u^2 - \frac{1}{u^2} - 4\log u\right] + C,$$

$$y = \frac{a}{2}R\left[u^2 + \frac{1}{u^2}\right] + C',$$

$$z = 2aRi\left[u + \frac{1}{u}\right] + C'',$$

C, C′, C″ étant des constantes réelles. Posons

$$u = e^{\frac{\alpha-\beta i}{2}},$$

α et β étant des quantités réelles. Les équations précédentes deviendront

$$\begin{aligned} x = \frac{a}{2}R\,[&-ie^{\alpha}(\cos\beta - i\sin\beta) \\ &+ ie^{-\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) + 2i(\alpha - \beta i)] + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = -\frac{a}{2}R\,[&e^{\alpha}(\cos\beta - i\sin\beta) \\ &+ e^{-\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)] + C', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = 2aR\Big[&ie^{\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2}\right) \\ &+ ie^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2} + i\sin\frac{\beta}{2}\right)\Big] + C''. \end{aligned}$$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x = a\left(\beta - \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\sin\beta\right) + C.$$

$$y = -a\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\cos\beta + C',$$

$$z = 2a\sin\frac{\beta}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right) + C''.$$

Remplaçons α par u, β par v, u et v étant des variables réelles ; puis déterminons les constantes de manière que, pour $u = 0$, on obtienne les équations de la cycloïde proposée, nous aurons définitivement

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} x &= a\left(v - \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}\sin v\right),\\ y &= a\left(1 - \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}\cos v\right),\\ z &= 2a\left(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right)\sin\frac{v}{2}. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations qui déterminent la surface cherchée.

Discussion. — Remarquant que l'on a

$$e^{u} + e^{-u} = \left(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right)^2 + 2,$$

on élimine facilement u entre les équations (C) ; et l'on peut alors regarder la surface comme engendrée, soit par la parabole variable définie par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &z^2 - 8a^2\sin^2\frac{v}{2}\left(\frac{a-y}{a\cos v} - 1\right) = 0,\\ &\frac{(a-y)\sin v}{\cos v} + x - av = 0 ; \end{aligned}\right.$$

soit par celle qui est définie par

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &z^2 - 8a^2 \sin^2 \frac{v}{2}\left(\frac{av - x}{a \sin v} - 1\right) = 0,\\ &\frac{av - x}{\sin v}\cos v + y - a = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces deux paraboles sont identiques pour une valeur donnée de v; on emploiera les équations (1) pour les valeurs de v qui annulent $\sin v$, et (2) pour celles qui annulent $\cos v$.

Ces équations montrent que la surface que nous étudions est coupée par une infinité de plans suivant une parabole. Cette parabole a son plan constamment parallèle à l'axe des z, et son axe dans le plan des xy. Son sommet décrit la cycloïde donnée, comme on le constate facilement, et, pour les valeurs de v égales à

$$\frac{\pi}{2} - v_0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + v_0 \quad \left(v_0 < \frac{\pi}{2}\right),$$

les paramètres de ces paraboles sont les mêmes; elles sont symétriquement placées par rapport au plan $x = a\pi$.

Les plus remarquables de ces paraboles sont données par les valeurs de v égales à 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.

Pour $v = 0$ et pour $v = 2\pi$, on obtient par (1) l'axe des y et sa parallèle menée par le point $x = 2a\pi$, $y = 0$, $z = 0$. Ce sont les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement. Ces tangentes sont donc situées sur la surface. Pour $v = \frac{\pi}{2}$ et pour $v = \frac{3\pi}{2}$, les équations (2) donnent les deux paraboles égales

$$(3)\qquad y = a, \qquad z^2 + 4ax - 2a^2(\pi - 2) = 0,$$

$$(4)\qquad y = a, \qquad z^2 - 4ax + 2a^2(2 + 3\pi) = 0.$$

situées toutes deux dans le plan $y - a = 0$, mais orientées en sens contraire.

Enfin, pour $v = \pi$, les équations (1) donnent la parabole

$$x = a\pi, \qquad z^2 - 8ay + 16a^2 = 0,$$

située dans le plan $x - a\pi = 0$, perpendiculaire à la base de la cycloïde, en son milieu. C'est la parabole de paramètre maximum.

En général, pour

$$v = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

on a, si k est pair, la parabole

$$y - a = 0, \qquad z^2 + 4ax - 2a^2[(2k+1)\pi - 2] = 0;$$

et si k est impair, la parabole

$$y - a = 0, \qquad z^2 - 4ax + 2a^2[(2k+1)\pi + 2] = 0.$$

Le mode de génération qui vient d'être étudié indique d'une manière assez exacte la forme de la surface.

En donnant à u et à v d'abord les valeurs u_0 et v_0, puis les valeurs $u = -u_0$, $v = v_0$, les formules (C) donnent les mêmes valeurs de x et de y; celles de z sont égales et de signes contraires; ce qui prouve que les points $M(u_0, v_0)$, $M'(-u_0, v_0)$ sont symétriques par rapport au plan des xy. Ce plan est donc un plan de symétrie de la surface.

Si l'on fait $u = u_0$, $v = v_0$, puis $u = u_0$, $v = -v_0$, les mêmes formules donnent les mêmes valeurs pour x et pour z; mais les valeurs de y sont égales et de signes contraires. Les points $M(u_0, v_0)$, $M'(u_0, -v_0)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des y. Cette droite est donc un axe de symétrie de la surface. On ferait voir de la même manière que la tangente au point de rebroussement $x = 2k\pi a$, $y = 0$, $z = 0$ est aussi un axe de symétrie de la surface. Il suffirait pour cela de donner à u et à v les deux couples de valeurs

$$\begin{aligned} &u_0, \qquad v_0 - 2k\pi, \\ &u_0, \quad -v_0 + 2k\pi. \end{aligned}$$

Équation différentielle des lignes de courbure de la surface. — Les cosinus directeurs de la normale à la surface au point (x, y, z) étant proportionnels aux binômes

$$u_1 + u, \qquad i(u_1 - u), \qquad uu_1 - 1,$$

les équations de cette normale peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} X &= x - (u_1 + u)\lambda, \\ Y &= y + i(u_1 - u)\lambda, \\ Z &= z + (uu_1 - 1)\lambda. \end{aligned}$$

Exprimons qu'il existe sur la surface un déplacement tel que le point (X, Y, Z) de la normale décrive une courbe tangente à cette normale. Nous devrons écrire

$$\frac{dX}{u_1 + u} = \frac{dY}{i(u_1 - u)} = \frac{dZ}{uu_1 - 1};$$

ce qui se ramène aisément à

$$\begin{vmatrix} dx & du_1 + du & u_1 + u \\ dy & i(du_1 - du) & i(u_1 - u) \\ dz & u\,du_1 + u_1\,du & uu_1 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En substituant dans cette équation les valeurs de dx, dy, dz qu'on tire des formules de M. Weierstrass et en effectuant les calculs et les réductions, on arrive à l'équation bien simple

$$\text{(D)} \qquad F(u)\,du^2 - F_1(u_1)\,du_1^2 = 0,$$

après suppression du facteur $2(1 + uu_1)^2$.

Mais on a trouvé plus haut

$$F(u) = -ai\frac{1-u^2}{u^3};$$

les équations cherchées seront donc

$$R\int\sqrt{\frac{1-u^2}{u^3}}\,du = \text{const.},$$

$$Ri\int\sqrt{\frac{1-u^2}{u^3}}\,du = \text{const.}$$

Mais on peut tirer directement ces équations des formules (C), indépendamment de toute quantité imaginaire. On obtient ainsi

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &(e^u - e^{-u})\cos\frac{v}{2}\,du^2 - 2(e^u + e^{-u} + 2)\sin\frac{v}{2}\,du\,dv \\ &\qquad\qquad - (e^u - e^{-u})\cos\frac{v}{2}\,dv^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

les variables u et v étant réelles. L'intégration ne paraît pas possible par les fonctions élémentaires.

En effectuant les calculs qui conduisent à l'équation (E), on remarque la relation

$$\frac{p}{q} = -\cot g\frac{v}{2},$$

p et q étant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, ce qui montre que, pour $v = \pi$, c'est-à-dire pour tous les points de la parabole obtenue en coupant la surface par un plan perpendiculaire à la base de la cycloïde, à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs, on a $p = 0$. Mais les cosinus directeurs de la normale à la surface étant proportionnels à p, q et -1, on en conclut que la normale à la surface est, pour tous les points de la parabole considérée, dans un plan perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire dans le plan même de cette courbe qui est dès lors à la fois une ligne géodésique et une ligne de courbure de la surface, tout comme la cycloïde donnée.

IV. — Mécanique rationnelle.

Théorie. — *Les équations du mouvement d'un système matériel étant supposées mises sous la forme canonique, montrer comment Jacobi a ramené l'intégration de ces équations à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

Application. — *Étant donné un hyperboloïde à une nappe représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où l'on suppose $a < b$, déterminer le mouvement d'un point matériel non pesant dont la masse est égale à l'unité, qui est assujetti à rester sur la surface de l'hyperboloïde et qui est attiré vers le centre par une force égale au produit d'une constante ω^2 par la distance du mobile au centre.

A l'instant initial, le mobile est situé dans le plan des xz, à la distance b du centre, et la vitesse v_0 est parallèle à l'axe des y.

Discuter les diverses formes que peut affecter la trajectoire suivant les valeurs de v_0; indiquer notamment les lignes de courbure de l'hyperboloïde entre lesquelles elle est comprise. On déterminera la position du mobile sur l'hyperboloïde à une nappe à l'aide des coordonnées elliptiques λ et μ définies par les deux *équations*

$$\frac{x^2}{\lambda + a^2} + \frac{y^2}{\lambda + b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} - \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1,$$

en supposant $c^2 < \lambda$ *et* $a^2 < \mu < b^2$.

Voir la *Dynamique analytique* de M. Émile Mathieu, où un calcul analogue est fait pour l'ellipsoïde.