E. MARCHAND

Concours général de 1889. Autre solution

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 331-342

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__331_0>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1889. — AUTRE SOLUTION;

PAR M. E. MARCHAND,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Caen.

On donne un cercle ayant pour centre le point O *et une parabole* P, *on considère les coniques* C *inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle et à la parabole. Cela posé, on demande de trouver :*

1° *L'enveloppe des polaires* A *du centre* O *par rapport aux coniques* C ;

2° *L'enveloppe des tangentes* δ *aux coniques* C *telles que la normale au point de contact passe par* O; *l'enveloppe des axes des coniques* C; *le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur* A, *sur les tangentes* δ *et sur les axes de* C.

I. L'emploi des coordonnées tangentielles permet de résoudre très simplement la première Partie; mais sans expliquer pourquoi l'on trouve trois fois la même parabole comme enveloppe (l'axe étant perpendiculaire à celui de la parabole donnée P et la directrice passant par O).

La seconde Partie résulte aussitôt de la première. Il suffit d'ouvrir à la page 551 le *Traité de Géométrie analytique*, par M. H. PICQUET, pour constater que, *toute podaire de parabole par rapport à un point* O *de la directrice est une strophoïde dont le point fixe est à l'intersection de la tangente au sommet avec la droite qui joint le point* O *au foyer.*

II. Pourquoi les trois enveloppes coïncident-elles, ou plutôt comment peut-on ramener les trois énoncés à un seul? Telle est la question à laquelle je tâcherai de répondre en m'appuyant sur les propriétés les plus simples des réseaux de coniques (H. Picquet, p. 524)

$$(1) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0.$$

J'aurai besoin de rappeler quelques théorèmes de Chasles (*Journal de Liouville*, 2e série, t. V) et je reproduirai rapidement leur démonstration, telle que M. Darboux l'a présentée dans son Cours de 1875 à l'École Normale.

III. Le réseau (1) contient une infinité de faisceaux dont un quelconque est déterminé, comme on le prouve facilement, par

$$(2) \qquad a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 = 0,$$

a_1, a_2, a_3 étant des nombres fixes donnés.

Théorème fondamental. — *Deux faisceaux d'un même réseau ont toujours une conique commune.*

En effet, cela revient à dire que deux équations telles que (2) déterminent toujours un système de valeurs uniques de λ_1, λ_2, λ_3. Le théorème n'a pas de cas d'exception.

Ici l'on prendra un réseau tangentiel (H. Picquet, p. 525)

$$(3) \qquad \mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \Gamma_3 = 0,$$

les trois coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui définissent géométriquement le réseau étant le système des points circulaires I, J, un point double O et une conique quelconque Γ. Si l'on combine ces trois coniques fondamentales deux à deux, on a les trois faisceaux suivants, qui appartiennent au réseau :

1° Le système des cercles de centre O, c'est-à-dire le faisceau tangentiel déterminé par le point double O et par les points I, J.

2° Le système des coniques homofocales à Γ, déterminé par la conique Γ et les points I, J.

3° Le système des coniques tangentes à Γ aux deux points G, G′ de contact avec les tangentes menées de O, déterminé par Γ et le point double O.

Si donc on considère le faisceau tangentiel ayant pour base deux coniques quelconques du réseau, d'après le théorème fondamental, ce faisceau comprendra un cercle de centre O et une conique homofocale à Γ, cette dernière pouvant se réduire exceptionnellement aux points I, J.

On ne saurait mieux montrer l'intérêt de ces considérations qu'en rappelant comment Chasles en déduit la propriété élémentaire des coniques

$$\rho \pm \rho' = 2a.$$

Soient deux points G, G′ sur une même conique, l'un fixe G, l'autre mobile G′. Il suffit d'établir que la somme ou la différence des rayons vecteurs est la même pour les deux points. Or je mène les tangentes en G et G′ qui concourent en O et je considère le réseau défini par le point double O, la conique donnée Γ et les deux points I, J. Une première conique du réseau est donnée par GG′, puisque GG′ est une conique du faisceau (3°) déterminé par Γ et par O. Une seconde conique du réseau est fournie par les foyers F et F′ de la conique Γ, puisque FF′ est une conique du faisceau (2°) des coniques homofocales à Γ. Les deux coniques GG′ et FF′ ont comme tangentes communes FG, FG′, F′G, F′G′. Les coniques tangentes à ces quatre droites forment un faisceau du réseau ; ce faisceau doit admettre, d'après le théorème fondamental, un cercle de centre O. Le quadrilatère FF′GG′ est donc circonscriptible à un cercle de sorte que la somme de deux de ses côtés est égale à la somme de deux autres côtés. On verra facilement qu'on peut avoir, soit

$$\rho + \rho' = \rho_1 + \rho'_1,$$

soit

$$\rho' - \rho = \rho'_1 - \rho_1.$$

Si le point G′ se meut d'une manière continue sur la courbe, il est clair que l'on conservera toujours, soit la somme, soit la différence constante; mais je n'insiste pas sur cette discussion, inutile pour la suite.

IV. Le réseau tangentiel (3) contient une infinité de coniques réduites à deux points G, G′ ; la droite qui joint ces deux points sera appelée par la suite droite double du réseau.

La polaire A du point O par rapport à une conique quelconque C du réseau est la droite qui joint les points de contact G, G′ des tangentes menées de O à C. On vient de voir que GG′ est une des coniques du réseau, appartenant au faisceau OO, C.

Donc A est une droite double du réseau. Réciproquement, sur toute droite double du réseau se trouvent, par définition, deux points G, G′ formant une conique du réseau. On a vu que toutes les coniques tangentes en G et G′ à OG et OG′ forment un faisceau du réseau. D'après le théorème fondamental, tout faisceau de coniques C, compris dans le réseau, comprend une conique tangente à OG, OG′ en G et G′.

Donc : 1° les polaires du point O par rapport aux coniques C formant un faisceau quelconque du réseau ne sont autre chose que les droites doubles du réseau.

Soit maintenant une conique du réseau admettant une tangente T, telle que la normale au point de contact M passe par O. Je prends comme seconde conique le cercle de centre O et de rayon OM, et, si je circonscris un quadrilatère à ces coniques, il est clair que deux sommets opposés G et G′ seront sur T. Donc T est une droite double du réseau. Réciproquement, si l'on prend une droite double GG′, on peut dans chaque faisceau du réseau trouver une conique tangente à GG′. Je dis que le point de contact est le pied M de la perpendiculaire abaissée de O sur GG′. En effet, si l'on prend le faisceau défini par la conique GG′ et une seconde conique du réseau tangente à GG′, deux des quatre tangentes communes seront venues se confondre, de sorte que la limite de leur intersection soit le point de contact M; or le quadrilatère circonscrit à deux coniques du réseau étant toujours circonscrit à un cercle de centre O, si deux côtés du quadrilatère tendent à se confondre, la limite commune des deux points de contact avec le cercle sera la position limite de l'intersection des deux droites, c'est-à-dire le point M déjà nommé, et l'on sait qu'une tangente à un cercle en M est perpendiculaire au rayon OM.

Alors, 2° les tangentes T aux coniques C d'un faisceau quelconque du réseau, telles que les normales au point de contact passent par le point O, ne sont autre chose que les droites doubles du réseau.

Je ferai remarquer ici que le point M est un des deux points en lesquels se décompose une des coniques du faisceau précédent; il ne diffère nullement des points G et G′, comme on le verrait, en prenant, par exemple, le faisceau défini par le cercle de centre O et de rayon OG et par les deux points G, G′; le point G occupera par rapport à ce nouveau faisceau la position qu'occupait M tout à l'heure.

Enfin tout axe d'une conique C du réseau contient deux foyers F et F′. Si l'on prend le faisceau formé par C et IJ, on voit que le système de deux points F, F′ est une conique du réseau. Donc tout axe est une droite double du réseau. Réciproquement, sur une droite double du réseau on a deux points G, G′ formant une conique du réseau. Le faisceau GG′, IJ, c'est-à-dire le faisceau de toutes les coniques ayant G et G′ comme foyers, appartient au réseau.

D'après le théorème fondamental, dans tout faisceau de coniques C du réseau, il y en aura une admettant G, G′ comme foyers et par suite GG′ comme axe. Il faut toutefois observer que, si l'on prenait les deux faisceaux formés de coniques homofocales à deux coniques quelconques du réseau, la conique commune se réduirait aux points I, J.

Par suite : 3° les axes des coniques C d'un faisceau quelconque du réseau ne sont autre chose que les droites doubles du réseau.

Remarquons, en terminant, que les points de contact d'une conique du réseau avec sa polaire Δ, prise par rapport à O (appelés G, G′), ainsi que le point de contact d'une tangente T, telle que la normale passe par O (appelé M), peuvent être considérés comme foyers d'une conique d'un quelconque des faisceaux du réseau qui ne soit pas formé de coniques homofocales.

V. L'application au problème est dès lors évidente. On est ramené dans les trois cas à trouver l'enveloppe des droites doubles du réseau, la cayleyenne du réseau (H. Picquet, p. 526). Je reviendrai plus tard sur ce point. Pour l'instant, je remarque que l'énoncé de la première Partie peut être modifié de bien des manières.

Au lieu de considérer le faisceau des courbes C de l'énoncé, je puis prendre un autre faisceau quelconque du réseau, par exemple le faisceau des paraboles homofocales à la parabole donnée P, ou même le faisceau des coniques homofocales à une conique quelconque du réseau. Je suis ramené à cet énoncé d'un problème, traité par Painvin dans sa *Géométrie analytique* (n° 976) :

L'enveloppe des polaires d'un point fixe P *par rapport à un système de coniques homofocales est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à* PO.

O étant le centre des coniques homofocales, si l'on prend le système de paraboles homofocales à P, on voit que l'axe de la nouvelle parabole est perpendiculaire à l'axe de P.

Ceci montre, en passant, que toutes les coniques du réseau ont leurs centres sur une droite, savoir la parallèle à l'axe de la parabole P menée par O.

Comme par tout point du plan passent deux coniques homofocales d'un même système se coupant orthogonalement, on a cet énoncé de Painvin (n° 976) :

Si par un point on mène des tangentes aux coniques d'un système homofocal les normales correspondantes enveloppent une parabole.

Au lieu de détacher du réseau un faisceau de coniques homofocales, on peut en détacher le système des coniques tangentes à deux droites OG, OG′ en deux points donnés G et G′. On voit qu'une parabole est la solution de ce problème (Concours académique de Lyon en 1877) :

Enveloppe des axes des sections coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés.

Il est inutile, après ce qui a été dit (III), de démontrer que tout système de coniques homofocales et tout système de coniques tangentes à deux droites en deux points donnés peuvent être rattachés à un pareil réseau.

Si l'on passe maintenant à la seconde Partie, au lieu de définir le lieu comme podaire d'une parabole, on peut le ramener à ce problème (*Géométrie analytique* de Briot et Bouquet, 6e édition, p. 352) :

Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux diverses courbes du second degré ayant pour foyers deux points donnés F *et* F'.

Il suffira enfin de citer ce problème proposé en 1861, pour l'admission à l'École Normale :

On donne une conique et un point P *dans son plan. Par ce point on mène une secante* PAB, *puis, par les points* A *et* B *où elle rencontre la conique, des tangentes qui se coupent en* M. *On abaisse* MK *perpendiculaire sur* PAB *Trouver :* 1° *le lieu des points* K *qui est le même pour toutes les coniques homofocales;* 2° *l'enveloppe de la droite* MK.

Nous avons vu aussi que le lieu de la deuxième Partie n'est autre chose que le lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère circonscriptible à un cercle; ceci, comme on va le voir, montre que la strophoïde obtenue est hessienne d'un certain réseau tangentiel.

VI. Pour terminer, je vais indiquer comment on vérifie que le problème dont on s'occupe ici n'est qu'un cas particulier dont la solution est donnée par la théorie générale des réseaux. Je m'appuierai sur le Livre de

M. H. Picquet (Livre III, Chap. VII, *Propriétés de trois coniques*), où la question générale est traitée d'une manière très remarquable et très utile, comme j'espère le montrer rapidement.

Nous avons ici un réseau tangentiel

$$(3) \qquad \mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \Gamma_3 = 0,$$

et l'on peut prendre

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= w^2, \\ \Gamma_2 &= u^2 + v^2, \\ \Gamma_3 &= A u^2 + B v^2 + 2F vw + 2G wu + 2H uv. \end{aligned}$$

On fera F ou G nul si l'on veut que la droite, lieu des centres, soit un des axes de coordonnées.

A ce réseau tangentiel correspond un réseau ponctuel corrélatif (*voir* H. Picquet, p. 525, n° 220). Soit

$$(4) \qquad C \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

une des coniques de ce second réseau. On doit avoir

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a(\mu_2 + \mu_3 A) + b(\mu_2 + \mu_3 B) \\ & \quad + c\mu_1 + 2\mu_3(fF + gG + hH) = 0. \end{aligned} \right.$$

Égalant à zéro les coefficients de μ_1, μ_2 et μ_3 dans (5), on a

$$\begin{gathered} c = 0, \\ a + b = 0, \\ aA + bB + 2(fF + gG + hH) = 0; \end{gathered}$$

donc, pour les coniques cherchées, on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a(x^2 - y^2) + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0, \\ & \quad a(A - B) + 2(fF + gG + hH) = 0. \end{aligned} \right.$$

Éliminant un des paramètres a, f, g, h entre les deux équations (6) et égalant à zéro les coefficients des trois autres, on aura trois coniques

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 - 0$$

et le faisceau ponctuel corrélatif de (3)

$$(7) \qquad \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0.$$

On peut aussi écrire que les coefficients de a, f, g, h sont proportionnels dans les deux équations (6)

$$\frac{x^2 - y^2}{A - B} - \frac{yz}{F} - \frac{zx}{G} = \frac{xy}{H}.$$

On voit que les trois coniques C_1, C_2, C_3, qu'on peut former en égalant ces rapports deux à deux, sont des hyperboles équilatères passant toutes les trois par l'origine O des coordonnées. Or je lis dans l'Ouvrage de M. Picquet (p. 533) :

« Un des cas d'exception est celui où les coniques C_1, C_2, C_3 sont toutes les trois des hyperboles équilatères; alors il en est de même de toutes les coniques du réseau, et elles n'ont en général aucun point commun. Dans ce cas, une couple de points conjugués communs est formée par les points cycliques, et la hessienne du système est le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel dont deux courbes sont les deux autres coniques, qui, avec le couple des points cycliques, définissent le réseau tangentiel: la cayleyenne est l'enveloppe des axes de ces coniques. »

Ici les trois hyperboles équilatères $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ passent par un même point, le point O.

Le lieu demandé dans la première Partie est l'enveloppe des axes ou la cayleyenne; le lieu demandé dans la seconde Partie est le lieu des foyers ou la hessienne. On a d'ailleurs vu que l'on a une infinité de faisceaux de coniques, tous ceux appartenant au réseau, pour lesquels ces deux lieux seraient les mêmes, ce qui me paraît une généralisation très curieuse de l'énoncé. Les lieux 1° et 2° ne sont pas altérés si l'on remplace le faisceau C de l'énoncé par tout faisceau défini par deux coniques de notre réseau.

La solution dépend ici, non du cas général, c'est-à-dire des énoncés 11 et 12 que donne M. Picquet à la page 535, mais de l'énoncé 9 de la même page :

« Si les coniques d'un réseau ponctuel ont un point commun, la cayleyenne se réduit à ce point et à une conique, et la hessienne a un point double en ce point. »

Resterait à déduire des résultats généraux (énoncés 11 et 12) que l'on a une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui de P et dont la directrice passe par O. Je ne m'en occuperai pas.

Pour terminer, j'applique au réseau tangentiel (3) l'équation générale de la cayleyenne (H. Picquet, p. 528)

$$C = \begin{vmatrix} \Gamma'_{1u} & \Gamma'_{1v} & \Gamma'_{1w} \\ \Gamma'_{2u} & \Gamma'_{2v} & \Gamma'_{2w} \\ \Gamma'_{3u} & \Gamma'_{3v} & \Gamma'_{3w} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & w \\ u & v & 0 \\ \Gamma'_u & \Gamma'_v & \Gamma'_w \end{vmatrix} = 0.$$

On a $w = 0$, c'est-à-dire l'origine O, et la parabole

$$u\Gamma'_v - v\Gamma'_u = 0.$$

C'est bien ce que donne le calcul direct. Je laisse de côté le calcul de la hessienne, qui ne présente d'ailleurs pas plus de difficultés (H. Picquet, p. 527 et p. 528).

Si l'on partait du réseau ponctuel corrélatif (7) d'hyperboles équilatères, on aurait encore d'autres énoncés conduisant toujours à la parabole enveloppe du n° I, à la strophoïde podaire du n° II. On sait, par exemple (H. Picquet, p. 526), que les droites appelées A, T dans l'énoncé seront l'une des deux droites auxquelles peut se réduire une conique décomposable du faisceau ponctuel (7). De même les points que j'appelais G, G′ ou M sont l'intersection de deux droites auxquelles peut se réduire une conique décomposable du faisceau (7). La question est donc loin d'être épuisée.