NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. MANNHEIM

Sur un déplacement particulier d'une figure de forme invariable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 308-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__308_0>

SUR UN DÉPLACEMENT PARTICULIER D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE;

PAR M. A. MANNHEIM.

Extrait du Tome III (1889) des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Dans mon travail *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace* (¹), j'ai démontré que : *Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une ellipse.*

Je suis arrivé à ce théorème en faisant usage de quelques propositions de *Géométrie cinématique*.

Certes, la découverte d'une vérité géométrique constitue toujours un progrès, quelle que soit la voie suivie pour y parvenir. Mais, à côté de ce progrès, il y en a un autre d'ordre différent, qui consiste à démontrer *géométriquement* une vérité géométrique, en ne recourant qu'au plus petit nombre possible de propriétés primordiales.

Les démonstrations données par plusieurs géomètres du théorème que je viens de rappeler ne répondent pas à cette idée. C'est pourquoi, le reprenant moi-même, j'ai entrepris l'essai suivant.

En outre, j'ai réuni dans le présent travail quelques

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séances des 3 et 10 mars 1873, et *Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 106.

théorèmes qui se rattachent directement à celui énoncé plus haut et j'ai terminé en étudiant d'une façon purement géométrique ce qui est relatif au déplacement d'une figure dont chacun des points décrit une ellipse.

§ I. — Sur le déplacement dans l'espace d'une droite dont tous les points décrivent des ellipses.

Théorème I. — *On donne quatre plans* (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), *et une droite* D *qui les rencontre aux points* p_1, p_2, p_3, p_4 : *d'un point quelconque de l'un des plans on peut mener une droite, et une seule, qui soit partagée par les plans donnés comme ceux-ci partagent* D.

Soit a_1 un point quelconque de (P_1). Menons un plan parallèle à (P_2) et à une distance telle, qu'une droite arbitraire, issue de a_1, soit partagée par (P_2) et ce plan parallèle, en segments dont le rapport est égal à $\frac{p_1p_2}{p_1p_4}$. Ce plan parallèle à (P_2) coupe (P_4) suivant une droite. On obtient une droite analogue sur (P_4) en opérant avec (P_3) comme nous venons de le faire avec (P_2).

Ces deux droites se coupent en un point a_4 : la droite a_1a_4 est la droite demandée et il résulte de sa construction qu'elle est unique.

Pour simplifier le langage, je dirai que la droite a_1a_4 est *proportionnelle à* D et que les points a_1, a_2, a_3, a_4 où elle rencontre les plans donnés sont des *points correspondants*.

Remarque. — *La droite proportionnelle à* D *qui passe par un point à l'infini sur l'un des plans est tout entière à l'infini.*

Théorème II. — *Sur chacun des plans donnés les* *points correspondant aux points d'une droite arbitraire $a_1 b_1$ de l'un d'eux sont en ligne droite.*

Des points a_1, b_1 menons les droites $a_1 a_4$, $b_1 b_4$ proportionnelles à D et formons le quadrilatère $a_1 b_1 a_4 b_4$. Les droites $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ partagent, comme l'on sait, en segments proportionnels aux segments de D toutes les droites qui divisent proportionnellement les côtés $a_1 b_1$, $a_4 b_4$: de là résulte le théorème énoncé.

Je dirai que les droites $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ sont *correspondantes.*

Théorème III. — *On construit des droites proportionnelles à* D *et l'on prend sur chacune de ces droites le point homologue à un point arbitraire p_5 de* D : *tous ces points appartiennent à un même plan* (P_5).

Il résulte de la démonstration du théorème précédent que les points homologues de p_5, sur les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur $a_1 b_1$ appartiennent à une droite $a_5 b_5$. On peut dire la même chose pour toutes les droites issues de p_1 qui s'appuient sur $a_1 b_1$. On obtient ainsi des droites partant de p_5 et qui s'appuient sur $a_5 b_5$. Le lieu de ces droites est un plan (P_5) qui contient d'après cela l'homologue de p_5 pris sur une droite quelconque proportionnelle à D.

Par chacun des points de D passe un plan, tel que (P_5). Je dirai que *tous ces plans appartiennent au système des quatre plans donnés.*

Remarque. — Du théorème II résulte qu'*à une droite de l'un des plans du système correspond une droite sur tous les autres.*

Théorème IV. — *Si l'on prend sur l'un des plans du système des droites convergentes en un point à dis-*

tance finie ou infinie, il leur correspond, sur tous les autres plans, des droites convergentes en un point à distance finie ou infinie.

Ce théorème se démontre immédiatement en employant la droite proportionnelle à D qui passe par le point de convergence des droites données.

Théorème V. — *A une conique tracée sur l'un des plans du système correspond une conique sur chacun des autres plans du système.*

A une droite de l'un des plans du système correspond une droite sur chacun des autres plans, par suite à une courbe d'un certain ordre correspond une courbe de ce même ordre sur chacun des autres plans du système. En particulier, ceci est vrai pour une conique tracée sur l'un des plans du système.

Théorème VI. — *Si une conique* C_1 *tracée sur* (P_1) *est une ellipse, les courbes correspondantes sont aussi des ellipses.*

Car C_1 n'ayant pas de point à l'infini il en est de même sur les coniques correspondantes.

Théorème VII. — *Les centres des coniques correspondantes* C_1, C_2, C_3 *sont des points correspondants.*

En effet, une tangente à C_1 a pour correspondantes des tangentes aux coniques correspondantes C_2, C_3, ... Deux tangentes à C_1, qui sont parallèles, ont pour correspondantes, d'après le théorème IV, des tangentes parallèles pour chacune des ellipses correspondant à C_1. Par suite, les diamètres de contact de ces tangentes parallèles se correspondent et alors aussi les centres des ellipses correspondantes.

Appliquons les théorèmes précédents : prenons un ellipsoïde (S) et coupons-le par un plan arbitraire (P). Appelons S la section ainsi obtenue. On sait que *les normales à* (S), *dont les pieds sont les points de* S, *sont partagées par* (P) *et les plans principaux de* (S) *en segments proportionnels,* c'est-à-dire que *ces normales sont des droites proportionnelles.*

De ce que nous venons de démontrer il résulte que :

Les traces de ces normales sur les plans principaux de (S) *sont des ellipses,* que *les centres de ces courbes sont sur une droite qui passe par le centre de* S et enfin que *cette droite des centres est proportionnelle aux normales de* (S).

Prenons l'ellipsoïde concentrique et homothétique à (S) qui est tangent à (P). Son point de contact avec (P) est, comme l'on sait, le centre de S. La perpendiculaire à (P) élevée de ce centre est la normale à cet ellipsoïde. Comme cette surface est homothétique à (S), cette normale est proportionnelle aux normales de (S) : elle est alors la droite des centres des ellipses qui entrent dans le dernier énoncé. On peut donc compléter celui-ci en disant : *Cette droite des centres est perpendiculaire au plan* (P).

Reprenons maintenant les plans du système et la droite D dont nous nous sommes servis d'abord.

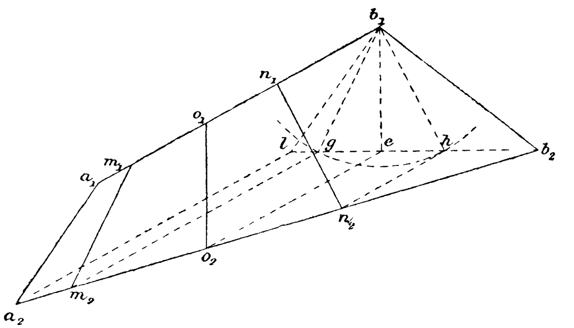
J'appelle *droite égale* à D une droite sur laquelle les plans du système déterminent des segments égaux aux segments que ces plans déterminent sur D.

THÉORÈME VIII. — *Sur une droite arbitraire* $a_1 b_1$ *de* (P_1), *il ne peut y avoir que deux points par lesquels passent des droites égales à* D.

Par a_1 et b_1 (*fig.* 1) menons des droites proportionnelles à D; elles rencontrent (P_2) en a_2 et b_2. Par a_2 menons la droite $a_2 l$, égale et parallèle à $a_1 b_1$, puis menons la droite lb_2. Sur le plan $b_1 lb_2$ décrivons du point b_1 comme centre une circonférence ayant un rayon égal au segment compris sur D entre (P_1) et (P_2).

Cette circonférence coupe lb_2 aux points g, h; de ces points menons gm_2, hn_2 parallèlement à $a_2 l$. Les points m_2, n_2, où ces droites rencontrent $a_2 b_2$ appartiennent aux droites égales demandées : l'une $m_2 m_1$ est parallèle à gb_1, l'autre $n_2 n_1$ est parallèle à hb_1.

Fig. 1.



D'abord les segments $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ sont égaux, puisqu'ils sont respectivement égaux aux segments égaux gb_1, hb_1; ensuite ils appartiennent à des droites proportionnelles à D, puisque $a_1 a_2$, $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, étant parallèles au plan $lb_1 b$, partagent $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$ en segments proportionnels.

On voit ainsi que les droites égales qui s'appuient sur $a_1 b_1$ sont les deux seules droites $m_1 m_2$, $n_1 n_2$.

Remarques. — Lorsque l'arc décrit du point b_1 comme centre coupe $l_2 b$ en deux points, il y a deux droites égales qui s'appuient sur $a_1 b_1$. Mais, si cet arc est tangent à lb_2 il n'y a plus qu'une droite égale $o_1 o_2$ dont la longueur est celle de la perpendiculaire abaissée de b_1 sur lb_2. La droite $o_1 o_2$ est alors, parmi les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur $a_1 b_1$, celle sur laquelle les plans du système interceptent les plus petits segments. L'arc tangent à lb_2 touche cette droite au milieu de gh. De tout cela résulte que :

La droite proportionnelle à D qui s'appuie sur $a_1 b_1$ et sur laquelle il y a les plus petits segments, est la droite $o_1 o_2$ qui joint les milieux des segments $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ déterminés sur les droites correspondantes $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ par deux droites égales. Le segment $o_1 o_2$ est égal à la bissectrice du triangle isoscèle $gb_1 h$.

THÉORÈME IX. — *Le lieu des points d'un plan du système d'où partent des droites égales est une ellipse E.*

Ce lieu est une conique, puisque, d'après le théorème précédent, une droite quelconque de ce plan ne le rencontre qu'en deux points. Cette conique est une ellipse, car il ne peut y avoir de point à l'infini, puisque d'un pareil point on ne peut mener une droite égale à une droite donnée à distance finie.

REMARQUE. — On peut encore énoncer ainsi ce théorème :

Si l'on déplace une droite de façon que quatre de ses points restent sur quatre plans donnés, tous ses points décrivent simultanément des ellipses.

Ces ellipses sont des courbes correspondant à E et, en vertu du théorème VII, *leurs centres sont en ligne droite.*

Nous avons ainsi retrouvé le théorème rappelé au commencement de ce travail en y ajoutant ce qui concerne la nature du lieu des centres des ellipses décrites.

THÉORÈME X. — *La droite* O *des centres des ellipses correspondant à* E *est, parmi les droites proportionnelles à* D, *celle sur laquelle les segments interceptés par les plans du système sont les plus petits possibles* (1).

Avec une corde de direction arbitraire de l'ellipse E, la corde de l'ellipse correspondante sur (P_2) et les droites égales qui réunissent les extrémités de ces droites, on forme un quadrilatère gauche analogue au quadrilatère $m_1 m_2 n_1 n_2$ de la *fig.* 1.

D'après ce que nous avons vu la droite proportionnelle à D qui s'appuie sur ces cordes, et sur laquelle il y a les plus petits segments, s'obtient en joignant par une droite les milieux de ces cordes. Pour chacune des cordes de E parallèles entre elles, on obtient ainsi une droite qui passe par le milieu de cette corde; toutes ces droites s'appuient sur le diamètre dont la direction est conjuguée de celle de ces cordes parallèles.

On peut répéter pour ce diamètre ce que je viens de dire pour une corde et l'on trouve ainsi que la droite proportionnelle à D, sur laquelle les plans du système interceptent les plus petits segments, passent par le centre de E et alors aussi par les centres des ellipses correspondant à cette courbe. Le théorème se trouve ainsi démontré.

THÉORÈME XI. — *Les droites égales, qui s'appuient*

(1) HALPHEN, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 114.

sur E, *sont également inclinées sur la droite* O *des centres des ellipses correspondant à* E.

Supposons que $m_1 n_1$ (*fig.* 1) soient les extrémités d'un diamètre de E. Parmi les droites proportionnelles à D qui s'appuient sur ce diamètre, celle sur laquelle il y a les plus petits segments est la droite $o_1 o_2$ qui est égale, comme nous l'avons vu, à la bissectrice du triangle isoscèle $g b_1 h$ dont les côtés égaux sont parallèles à $m_1 m_2$, $n_1 n_2$. Les droites égales $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ sont alors également inclinées sur $o_1 o_2$. Mais, pour un autre diamètre de E, on est toujours conduit à construire un triangle isoscèle égal à $g b_1 h$, puisque les côtés de ce triangle doivent être égaux à $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ et que la bissectrice doit être égale à $o_1 o_2$. Ces triangles isoscèles étant égaux, le théorème est démontré.

Théorème XII. — *La distance* $o_1 o_2$ *des centres des ellipses décrites par les points* m_1, m_2 *d'une droite égale mobile est égale à la projection du segment* $m_1 m_2$ *sur la droite* O.

Cela résulte de ce que $o_1 o_2$ est égale et parallèle à la bissectrice du triangle isoscèle $g b_1 h$ et que cette bissectrice est en même temps la hauteur de ce triangle.

Théorème XIII. — *Les points de deux droites proportionnelles à* D *qui se déplacent en restant chacune égale à elle-même décrivent sur chacun des plans donnés des ellipses concentriques et homothétiques* [1].

Quelle que soit la droite proportionnelle que l'on prenne comme droite égale mobile, on a toujours le même centre pour les ellipses décrites sur l'un des plans donnés parce que ce point est sur la droite unique O,

(1) Halphen, *loc. cit.*

proportionnelle à D, sur laquelle les plans donnés déterminent les segments les plus petits possibles.

Prenons (*fig.* 1) les droites proportionnelles $n_1 n_2 n_3$ et $b_1 b_2 b_3$ qui partent de deux points d'une droite issue de o_1. On a

$$\frac{o_1 n_1}{o_1 b_1} = \frac{o_2 n_2}{o_2 b_2} = \frac{eh}{eb_2}.$$

Ce dernier rapport est constant, quelle que soit la position de b_1 sur E, puisque les triangles isoscèles, tels que $gb_1 h$ sont toujours égaux et que $b_1 b_2$ est un segment de grandeur constante.

Le rapport $\frac{o_1 n_1}{o_1 b_1}$ est alors constant et le théorème est démontré.

Voici une application des théorèmes précédents :

Lorsqu'une droite se déplace de façon que trois de ses points restent sur trois plans donnés, un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde qui a pour centre le point de rencontre des plans donnés.

Ajoutons un quatrième plan passant par le quatrième point de la droite mobile. Si l'on déplace maintenant la droite de façon que ce point reste sur ce plan, il décrira une ellipse. La section faite par ce plan dans la surface engendrée est donc une ellipse. Comme ceci est vrai, quel que soit ce plan, cette surface est donc un ellipsoïde.

Si le plan mené par le point décrivant passe par le point de rencontre des trois plans donnés, il résulte du théorème X que ce point est le centre de l'ellipse décrite. Ce plan, mené par le point de rencontre des plans donnés, étant arbitraire, ce dernier point est le centre de l'ellipsoïde engendré par le quatrième point de la droite mobile. Le théorème est donc démontré.

Ce théorème, qui est dû à Dupin, donne lieu à ce cas particulier intéressant :

Lorsqu'une droite se déplace de façon que trois de ses points restent respectivement sur trois plans parallèles à une droite, un quatrième point de cette droite décrit un plan.

Je ne fais qu'énoncer ce résultat, ayant laissé de côté les cas particuliers des théorèmes démontrés dans ce premier paragraphe.

§ II. — Sur le déplacement dans l'espace d'une figure de grandeur invariable dont les points décrivent des ellipses.

Comme figure de grandeur invariable nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'une droite égale mobile dont quatre points restent sur quatre plans fixes. Nous allons montrer comment la propriété de cette droite, de faire toujours, pendant son déplacement, le même angle avec la droite des centres des ellipses décrites par ses points, conduit aisément à déterminer les conditions de déplacement d'une figure de forme invariable dont chacun des points décrit une ellipse.

Conservons les notations précédentes avec cette seule différence que nous appellerons D′ la droite désignée précédemment par D. Plaçons O verticalement, appelons (H) un plan horizontal fixe. La droite égale mobile D′, se déplaçant toujours de façon que quatre de ses points restent sur les plans (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), fait constamment le même angle avec (H).

Appelons D la projection de D′ sur le plan (H).

Puisque, comme nous l'avons démontré, les points de D′ décrivent des ellipses dont les centres sont sur O, les points de la droite D décrivent des ellipses concentriques dont le centre commun est le pied o de O sur (H).

Lemme. — *Le déplacement sur* (H) *de la droite* D, *dont les points décrivent des ellipses concentriques, peut être obtenu en liant cette droite à une circonférence qui roule dans l'intérieur d'une autre de rayon double.*

Pour un déplacement infiniment petit de D, on a un centre instantané de rotation c. La circonférence décrite sur oc comme diamètre rencontre (je le suppose d'abord) D en deux points réels. Les normales aux trajectoires de ces points passent par c et par suite les tangentes à ces trajectoires passent par o. Mais les trajectoires de ces points sont des ellipses et il ne peut y avoir pour une pareille courbe de tangente passant par le centre que si cette courbe est infiniment aplatie : ces deux points décrivent donc chacun une droite et le déplacement de D est alors celui d'une droite dont deux points décrivent chacun une droite.

Un pareil déplacement peut être obtenu, comme l'on sait, en supposant que D soit lié à la circonférence $\frac{C}{2}$ décrite sur oc comme diamètre que l'on fait rouler à l'intérieur de la circonférence C décrite du point o comme centre avec oc pour rayon.

Mais ces circonférences existent toujours et ne dépendent aucunement de la réalité des points de rencontre de D avec la circonférence décrite sur oc comme diamètre; par conséquent le résultat auquel nous venons d'arriver est général et le lemme est démontré.

Nous savons que D′ fait toujours un angle constant avec sa projection D. On obtiendra alors le déplacement de D′ en supposant que sur son plan projetant, entraîné avec D, cette droite soit transportée en même temps parallèlement à la direction des projetantes, c'est-à-dire qu'elle glisse dans la direction de O.

D'après cela, appelons (Cy) le cylindre dont C est la section droite, et $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ le cylindre dont $\frac{C}{2}$ est la section droite; nous obtiendrons le déplacement de D′ en liant cette droite au cylindre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ qui roule à l'intérieur de (Cy), en même temps qu'il glisse dans la direction de ses génératrices, de façon qu'un point de D′ soit assujetti à se déplacer sur le plan du système qui le contient [1].

Le déplacement de $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ étant ainsi défini, on peut entraîner une figure de forme invariable avec ce cylindre mobile. Nous savons déjà que tous les points de D′ décrivent des ellipses. Nous allons montrer qu'il en est de même de tous les points de la figure entraînée. Pour cela il suffit de faire voir que la trajectoire d'un quelconque de ces points est une ligne plane, puisque la projection de cette trajectoire sur (H) est la ligne décrite par un point du plan de $\frac{C}{2}$ qui roule dans C, et l'on sait que cette courbe est une ellipse.

Pour y arriver démontrons d'abord le théorème suivant, qu'on n'avait pas encore énoncé :

THÉORÈME XIV. — *Le cylindre* $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ *roule à l'intérieur de* (Cy) *et glisse de façon qu'un point* m' *se dé-*

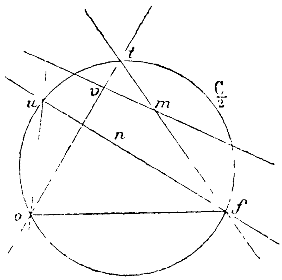
---

[1] *Voir* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* la Communication faite par M. Darboux le 17 janvier 1881 : *Sur le déplacement d'une figure invariable.*

place sur un plan fixe donné : parmi tous les points entraînés il y en a une infinité qui décrivent des droites.

Soit (M) le plan donné sur lequel se déplace m'; supposons que le plan horizontal (H) passe maintenant par le point de rencontre de (M) et de O; désignons toujours par o ce point de rencontre.

Fig. 2.



Prenons le plan (H) pour plan de la *fig.* 2. Soit ot l'horizontale de (M) qui passe par o. Menons par m' l'horizontale $m't'$ qui se projette sur (H) suivant la droite mt qui passe par le point de rencontre t de $\frac{C}{2}$ et de l'horizontale ot du plan (M).

L'horizontale $m't'$, menée ainsi par m', rencontre le cylindre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ au point f' dont la projection est f.

Lorsque $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ roule et glisse, comme nous l'avons dit, le point t' se déplace dans le plan vertical ot. Je dis que le point f' décrit une ligne droite.

La ligne décrite par f' se projette sur (H) suivant la ligne of.

Sa projection sur le plan vertical of, faite au moyen de parallèles à ot, est une droite, comme la projection de (M) sur ce plan. Car les perpendiculaires à O abaissées des points de cette dernière droite sont partagées dans un rapport constant par cette projection de la trajectoire de f', puisque ce rapport est toujours égal à $\frac{mt}{ft}$.

La trajectoire de f' se projetant suivant des droites sur deux plans différents est donc une droite.

Comme tous les points de la verticale, qui contient f', décrivent des lignes égales à la trajectoire de ce point, ils décrivent des droites. Le théorème est donc démontré.

Théorème XV. — *En dehors des points de la verticale f', tous les points invariablement liés au cylindre $\left(\frac{Cr}{2}\right)$ décrivent des ellipses.*

Par le point f' menons arbitrairement l'horizontale $f'u'$ dont la projection (*fig.* 2) est fu. Un point quelconque n de cette droite, entraînée avec $\left(\frac{Cr}{2}\right)$, décrit une ligne plane, car la projection de cette ligne, faite sur le plan vertical of par des parallèles à ou, partage dans un rapport constant les perpendiculaires abaissées des points de la droite of' sur O. La trajectoire de n' se projette sur (H) suivant une ellipse, puisque cette courbe est engendrée par le point n du segment de grandeur constante uf dont les extrémités décrivent les droites ou et of. La trajectoire de n' est donc une ellipse.

Les points de la verticale qui contient n' décrivent évidemment des ellipses égales à l'ellipse décrite par ce point. On voit donc que tous les points de toutes les horizontales partant de f', c'est-à-dire tous les points du plan horizontal mené par f', décrivent des ellipses et qu'il en est aussi de même de tous les points de l'espace qui peuvent toujours être liés au point de ce plan à l'aide de verticales. En résumé, tous les points liés à $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ décrivent des ellipses, excepté les points de la verticale f' qui décrivent des segments de droite, lesquels, à proprement parler, sont des ellipses aplaties.

Remarques. — *Les ellipses décrites par les points du plan horizontal mené par f' ont toutes même centre au point o.*

Les plans des ellipses décrites par les points d'une horizontale menée par f' passent par une même droite issue du centre commun o.

Théorème XVI. — *Les plans des ellipses décrites par les points d'une horizontale arbitraire, liée au cylindre mobile $\left(\frac{Cy}{2}\right)$, enveloppent un cône du second degré.*

Prenons une horizontale arbitraire à la hauteur du point f'. Nous savons construire pour un point m' de cette droite l'horizontale ot du plan de sa trajectoire. Appelons v le point où cette droite rencontre la projection sur (H) de l'horizontale donnée. La droite vm' est alors, sur le plan projetant de cette horizontale, la trace du plan de la trajectoire de m'. Les droites, telles que ft et ot, qui se coupent sur $\frac{C}{2}$ forment deux faisceaux homographiques. Les points, tels que m' et v, déterminent alors deux divisions homographiques, et les droites, telles que vm', qui joignent les points correspondants, enveloppent une conique. Cette conique n'est autre que la trace du cône enveloppe des plans des trajectoires décrites par les points de l'horizontale donnée. Le théorème est donc démontré.

REMARQUES. — Les plans des trajectoires décrites par les points d'une horizontale étant respectivement parallèles aux plans des trajectoires des points d'une droite entraînée et dont cette horizontale est la projection, *le théorème précédent s'étend à une droite quelconque.*

Il est facile de voir que *la conique, trace du cône sur le plan projetant de la droite donnée, est tangente aux plans horizontaux menés par o et f'.*

Le centre de cette conique appartient à la projection orthogonale, faite sur le plan de cette courbe, de l'axe de $\left(\frac{Cy}{2}\right)$; *il est du reste sur un plan horizontal à égales distances de o et de f'.*

Pour terminer, j'énoncerai les résultats suivants, conséquence de ce qui précède.

THÉORÈME XVII. — *Lorsque les points d'une figure mobile dans l'espace décrivent des ellipses, ces courbes ont leurs centres sur une même droite et leurs projections sur un plan perpendiculaire à cette droite sont des ellipses dont la somme ou la différence des axes est constante.*

PROBLÈME. — *Étant donné un plan arbitraire, construire le point lié à* $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ *et qui se déplace sur ce plan.*

Le point de rencontre γ du plan donné et de O est le centre de la trajectoire du point demandé. Par le point γ menons l'horizontale du plan donné et par le point où cette droite rencontre $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ menons la génératrice de ce cylindre; l'horizontale, qui s'appuie sur cette génératrice et qui passe par le point où $\left(\frac{Cy}{2}\right)$ est rencontré par la parallèle à of' menée du point γ, coupe le plan donné au point cherché.