NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LEINEKUGEL

Solution analytique de la question proposée au concours général en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 298-301

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__298_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1889;

PAR M. G. LEINEKUGEL,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

1° Prenons pour équations du cercle et de la parabole les équations suivantes

$$C = u^2 + v^2 - \rho^2 = 0,$$
$$P = au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2cu + 2c'v = 0.$$

L'équation des coniques Γ inscrites dans le quadrilatère circonscrit à C et à P sera

$$\Gamma = \lambda C + P = 0.$$

Soient u_0, v_0 les coordonnées de la droite A; l'équation du pôle sera

$$u\Gamma'_{u_0} + v\Gamma'_{v_0} + w\Gamma'_{w_0} = 0.$$

Pour que ce pôle soit l'origine, il faut que

$$\Gamma'_{u_0} = 0,$$
$$\Gamma'_{v_0} = 0,$$

ou

$$\lambda u_0 + P'_{u_0} = 0,$$
$$\lambda v_0 + P'_{v_0} = 0;$$

d'où pour l'enveloppe

$$(\mathrm{H}) \qquad uP'_v - vP'_u = 0,$$

équation d'une parabole (H) inscrite dans le triangle autopolaire commun à C et à P et admettant pour directrice la droite $cx - c'y = 0$.

2° Une tangente de coordonnées u_0, v_0 à Γ

$$[\Gamma(u_0, v_0) = 0]$$

a son point de contact déterminé par l'équation

$$u\Gamma'_{u_0} + v\Gamma'_{v_0} + w\Gamma'_{w_0} = 0.$$

Le point situé à l'infini sur cette tangente a pour équation

$$uv_0 - vu_0 = 0.$$

Pour que ces deux points soient vus de l'origine sous un angle droit, ce qui exprime que la normale à Γ au point de contact de la tangente de coordonnées (u_0, v_0) passe par l'origine, il faut que

$$\frac{\Gamma'_{u_0}}{\Gamma'_{v_0}} \frac{v_0}{u_0} = 1 \qquad \text{où} \qquad \frac{\Gamma'_{u_0}}{u_0} = \frac{\Gamma'_{v_0}}{v_0} = \frac{u_0\Gamma'_{u_0} + v_0\Gamma'_{v_0}}{u_0^2 + v_0^2};$$

en tenant compte de la relation

$$\Gamma(u_0, v_0) = u_0\Gamma'_{u_0} + v_0\Gamma'_{v_0} + w_0\Gamma'_{w_0} = 0,$$

on obtient

$$\frac{\lambda u_0 + P'_{u_0}}{u_0} = \frac{\lambda v_0 - P'_{v_0}}{v_0} = \frac{-\lambda\rho^2 + P'_{w_0}}{-(u_0^2 - v_0^2)} = -\mu.$$

Le lieu s'obtiendra en éliminant λ, μ entre les trois équations suivantes

$$\lambda u_0 - \mu u_0 - P'_{u_0} = 0,$$
$$\lambda v_0 - \mu v_0 - P'_{v_0} = 0,$$
$$\lambda\rho^2 - \mu(u_0^2 - v_0^2) + P'_{w_0} = 0;$$

l'élimination donne

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_0 & P'_{u_0} \\ v_0 & v_0 & P'_{v_0} \\ -\rho^2 & (u_0^2 - v_0^2) & P'_{w_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la première ligne par u_0, la deuxième par v_0, et ajoutons à la troisième, on a

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_0 & P'_{u_0} \\ v_0 & v_0 & P'_{v_0} \\ C & 0 & P \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et en supprimant les indices,

$$C(uP'_v - vP'_u) = 0.$$

Le lieu se compose donc de la parabole (H) et du cercle C.

L'équation du système des axes de la conique Γ est

$$b''[(\lambda u + P'_u)^2 - (\lambda v - P'_v)^2]$$
$$-(a - a')[\lambda u + P'_u](\lambda v - P'_v) = 0,$$

ou, ordonnée par rapport à λ,

$$\lambda^2[b''^2(u^2 - v^2) - (a - a')uv]$$
$$+ \lambda[2b''(uP'_u - vP'_v) - (a - a')(uP'_v + vP'_u)]^2$$
$$+ b''(P'^2_u - P'^2_v) - (a - a')P'_u P'_v = 0.$$

L'enveloppe est, par suite,

$$[2b''(uP'_u - vP'_v) - (a - a')(uP'_v - vP'_u)]^2$$
$$-4[b''(u^2 - v^2) - (a - a')uv]$$
$$\times [b''(P'^2_u - P'^2_v) - (a - a')P'_u P'_v] = 0$$

En simplifiant, il vient

$$(v P'_u - u P'_v)^2 [4 b''^2 + (a - a')^2] = 0.$$

On retrouve donc la même parabole (H).

La podaire de l'origine s'obtient en remplaçant dans l'équation de (H) u et v par les valeurs suivantes

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

elle a pour équation

$$(x^2 + y^2)(cx - c'y) + b''(x^2 - y^2) + (a' - a)xy = 0.$$

C'est une cubique circulaire à point double réel, les tangentes en ce point double étant rectangulaires.