NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur les plans diamétraux dans les surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 247-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__247_0>

SUR LES PLANS DIAMÉTRAUX DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Soit $f(x,y,z)=0$ l'équation de la surface du second ordre : si l'on coupe cette surface par des droites toutes parallèles entre elles et si l'on désigne par

$$x = x_0 + \alpha\rho,$$
$$y = y_0 + \beta\rho,$$
$$z = z_0 + \gamma\rho$$

les équations de l'une de ces droites, les points de rencontre de cette droite avec la surface sont donnés par l'équation du second degré en ρ

$$\rho^2\varphi(\alpha,\beta,\gamma) + \rho(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0}) + f(x_0,y_0,z_0) = 0,$$

$\varphi(x,y,z)$ étant l'ensemble homogène des termes du second degré de l'équation de la surface. Pour que le point (x_0,y_0,z_0) soit le milieu de la corde, il faut que l'équation en ρ ait ses racines égales et de signes contraires; si donc $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ est différent de zéro, les coordonnées du point (x_0,y_0,z_0) devront satisfaire à l'équation

$$\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} = 0.$$

Le point (x_0,y_0,z_0) se trouve donc dans le plan

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Réciproquement, tout point de ce plan jouit de cette propriété que, si par un point quelconque de ce plan on mène une droite parallèle à la direction α,β,γ, le point considéré est le point milieu de la corde correspondante.

Nous allons passer en revue les diverses surfaces du second ordre.

I. — Surfaces qui ont un centre unique à distance finie.

2. L'équation du plan diamétral de la direction α, 6, γ est, comme nous l'avons vu,

$$\alpha f'_x + 6 f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Cette équation nous montre que, dans le cas des surfaces à centre unique où les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ ont une solution, le plan diamétral passe par le point dont les coordonnées sont données par cette solution, et qui est le centre de la surface, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de α, 6, γ. Tous les plans diamétraux, dans les surfaces à centre unique, passent donc par le centre.

3. Nous avons supposé jusqu'ici que $\varphi(\alpha, 6, \gamma) \gtrless 0$, c'est-à-dire que les cordes parallèles à la direction α, 6, γ rencontrent effectivement en deux points la surface; le plan

$$\alpha f'_x + 6 f'_y + \gamma f'_z = 0$$

est alors le lieu des points milieux de ces cordes.

Mais, dans le cas où le cône asymptotique de la surface $\varphi(x, y, z) = 0$ est réel, il existe une infinité de directions $\alpha, 6, \gamma$ pour lesquelles $\varphi(\alpha, 6, \gamma) = 0$; elles sont données par les génératrices du cône asymptotique: alors le plan

$$\alpha f'_x + 6 f'_y + \gamma f'_z = 0$$

est le lieu des points tels que, si, par chaque point du lieu, on mène une parallèle à la direction asymptotique, ces droites ne rencontrent plus la surface. Le lieu de tous ces points est un plan qu'on appelle le *plan asymptote :* c'est en même temps le lieu de toutes ces droites. On peut, en effet, écrire l'équation du plan diamétral sous la forme

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0.$$

La droite

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\rho, \\ y &= y_0 + \beta\rho, \\ z &= z_0 + \gamma\rho \end{aligned}$$

est parallèle à ce plan, puisque

$$\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma = 2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la droite ayant le point (x_0, y_0, z_0) dans ce plan, et lui étant parallèle, y est contenue tout entière.

Les plans diamétraux des directions asymptotiques sont aussi appelés les *plans diamétraux singuliers de la surface.*

Nous allons démontrer maintenant que le plan asymptote est un plan tangent au cône asymptote de la surface le long de la génératrice asymptotique de direction α, β, γ.

Pour le démontrer, nous allons faire voir que, si la direction α, β, γ des cordes se rapproche jusqu'à se confondre avec une génératrice du cône asymptotique, le plan diamétral correspondant tend à se confondre avec le plan tangent au cône asymptote le long de la génératrice asymptotique.

Soient

O le centre de la surface (*fig.* 1) que nous prenons pour origine des coordonnées;

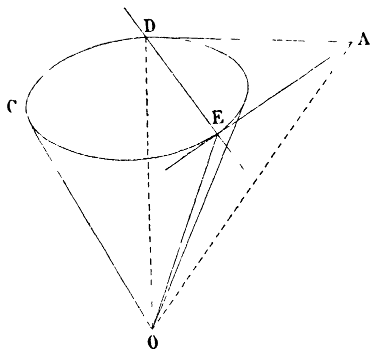
OA la droite de direction α, β, γ;

C la section faite dans le cône asymptote par un plan parallèle au plan des xy;

$$z = z_1$$

le plan diamétral de la direction OA est le même pour la surface et pour le cône asymptote.

Fig. 1.



Supposons que le point A soit dans le plan $z = z_1$: ses coordonnées seront

$$x_1 = \alpha r, \qquad y_1 = \beta r, \qquad z_1 = \gamma r.$$

Si l'on remplace α, β, γ par leurs valeurs tirées de ces équations dans l'équation du plan diamétral, nous aurons

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation de la polaire du point (x_1, y_1) par rapport à la courbe C, cette courbe étant rapportée à un système d'axes parallèles aux axes Ox, Oy menés par le point du plan de la courbe C, où l'axe des z rencontre ce plan, en faisant dans cette équation z et z_1 égaux à l'unité.

La polaire DE du point A n'est donc autre que la trace du plan diamétral de AO sur le plan de la courbe C.

On voit donc que, si la droite OA tend à se rapprocher d'une génératrice du cône asymptote, le point A se rapproche de la courbe C, et la polaire DE se rapproche de A; on voit donc que, si le point A vient en un point quelconque de la courbe C, la droite DE devient tangente à la courbe en ce point, et le plan diamétral de la direction limite de OA devient alors tangent au cône asymptote le long de la génératrice avec laquelle vient se confondre OA.

4. Nous avons vu que tous les plans diamétraux passent par le centre. Inversement, tout plan qui passe par le centre de la surface est diamétral d'une certaine direction de cordes. Proposons-nous de trouver cette direction.

Soit

$$ax + by + cz + d = 0$$

l'équation du plan donné; il sera diamétral de la direction α, β, γ si l'on a

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{d}.$$

Soit λ la valeur commune de ces rapports : on aura les relations

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma - \lambda a &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma - \lambda b &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma - \lambda c &= 0,\\
C\alpha + C'\beta + C''\gamma - \lambda d &= 0.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations devant être satisfaites pour des valeurs de α, β, γ, λ non toutes nulles, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & a \\ B'' & A' & B & b \\ B' & B & A'' & c \\ C & C' & C'' & d \end{vmatrix}$$

devra être nul. Cette condition exprime que le plan donné passe par le centre. Les trois premières équations déterminent α, β, γ en fonction de λ sous la forme

$$\alpha = \alpha_0 \lambda, \qquad \beta = \beta_0 \lambda, \qquad \gamma = \gamma_0 \lambda,$$

α_0, β_0, γ_0 ayant des valeurs parfaitement déterminées, puisque le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A \end{vmatrix}$$

est différent de zéro; l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

déterminera pour λ deux valeurs égales et de signes contraires, qui fournissent deux directions α, β, γ de signes contraires, et par suite une seule direction de cordes.

II. — Paraboloïdes.

5. Nous supposerons d'abord que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ soit différent de zéro; l'équation du plan diamétral de la direction $\alpha\beta\gamma$ est, comme précédemment,

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Nous allons montrer que tous ces plans diamétraux sont parallèles à une même droite, l'axe du paraboloïde.

En effet, pour que la surface soit un paraboloïde, il faut que deux des plans des centres se coupent suivant une droite à distance finie; nous supposerons, dans ce qui suit, que les deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ se coupent. Il s'ensuit que les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B'' & A' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} B'' & B' \\ A' & B \end{vmatrix}$$

ne sont pas nuls à la fois; admettons que

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Le déterminant du système $f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0$ est nul, mais le caractéristique du troisième ordre

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro si la surface est un paraboloïde, autrement la surface admettrait une ligne de centres.

Des deux conditions précédentes, on déduit l'identité

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y \\ B' & B & \frac{1}{2}f'_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est de la forme

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z - \pi = 0,$$

où ν et π sont différents de zéro; cette équation peut donc être résolue par rapport à f'_z; on a identiquement

$$f'_z = -\frac{1}{\nu}(\lambda f'_x + \mu f'_y - \pi),$$

et l'équation du plan diamétral devient

$$\alpha f'_x + 6 f'_y - \frac{\gamma}{\nu}(\lambda f'_x - \mu f'_y + \pi) = 0$$

ou

$$f'_x(\alpha\nu - \gamma\lambda) + f'_y(6\nu - \gamma\mu) - \gamma\pi = 0;$$

on voit, sous cette forme, que tous les plans diamétraux sont parallèles à la droite d'intersection des deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ qui se coupent suivant la droite dans la direction de laquelle le centre est rejeté à l'infini; cette droite est parallèle à l'axe : nous dirons que les deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ définissent la direction de l'axe de la surface.

6. Pour que les plans diamétraux correspondant à deux directions $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ soient parallèles entre eux, il faut que les directions considérées soient parallèles à un même plan, parallèle à l'axe de la surface.

En effet, si les plans

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0,$$
$$x\varphi'_{\alpha'} + y\varphi'_{\beta'} + z\varphi'_{\gamma'} + 2(C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma') = 0$$

sont parallèles, on aura

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}};$$

mais, de l'identité

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z + \pi = 0,$$

on déduit

$$\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta + \nu\varphi''_\gamma = 0,$$
$$\lambda\varphi'_{\alpha'} + \mu\varphi'_{\beta'} + \nu\varphi'_{\gamma'} = 0.$$

Il est aisé de voir que la seule relation

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}}$$

entraîne le parallélisme des deux plans.

On a, en effet,

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta}{\lambda\varphi'_{\alpha'} + \mu\varphi'_{\beta'}} = \frac{-\nu\varphi'_\gamma}{-\nu\varphi'_{\gamma'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_\gamma}.$$

Or, de l'égalité

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}},$$

on déduit

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} = \frac{\varphi'_{\alpha'}}{\varphi'_{\beta'}},$$

et, si l'on désigne par m la valeur commune de ces rapports, on voit que les deux directions $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont situées dans le plan

$$\varphi'_x - m\varphi'_y = 0,$$

qui est parallèle au plan

$$f'_x - mf'_y = 0$$

et, par suite, la proposition est démontrée.

Inversement, si la direction des cordes est contenue dans un plan parallèle à l'axe, les plans diamétraux correspondants sont parallèles entre eux. En effet, si

$$\varphi'_x - m\varphi'_y = 0.$$

est le plan auquel les cordes restent parallèles, on aura

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} = \frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\beta'}} = m,$$

d'où

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta}{\lambda\varphi'_{\alpha'} + \mu\varphi'_{\beta'}} = \frac{-\nu\varphi'_\gamma}{-\nu\varphi'_{\gamma'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}};$$

les plans diamétraux conjugués des directions $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma$ sont donc parallèles.

7. Le plan diamétral dans les paraboloïdes n'est indéterminé pour aucune direction de cordes, et il est rejeté à l'infini pour une seule direction, qui est celle de l'axe.

En effet, pour que le plan diamétral de la direction $\alpha\beta\gamma$ soit indéterminé, il faut que l'on ait à la fois

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= 0,\\
C\alpha + C\beta + C''\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Ces équations montrent que les trois caractéristiques du troisième ordre des équations $f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0$ sont nuls; cela n'est pas possible, car la surface serait un cylindre; le plan diamétral dans les paraboloïdes ne peut donc être indéterminé pour aucune direction de cordes.

Le plan diamétral n'est rejeté à l'infini que pour une seule direction des cordes conjuguées. Les équations

$$\begin{aligned} A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= 0, \\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= 0 \end{aligned}$$

sont compatibles, et les deux premières équations nous donnent

$$\alpha = \alpha_0\gamma, \qquad \beta = \beta_0\gamma,$$

α_0 et β_0 étant bien déterminés, ce qui ne fournit qu'une seule direction, comme nous l'avons déjà vu.

Nous allons examiner maintenant ce qui arrive quand $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est nul, et nous allons établir les résultats précédents par quelques considérations géométriques.

Plans diamétraux singuliers dans les paraboloïdes.

8. La condition $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \gtrless 0$ est toujours remplie quand la surface est un paraboloïde elliptique; mais $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ peut être nul dans le paraboloïde hyperbolique. La fonction $\varphi(x, y, z)$ est alors le produit de deux facteurs linéaires à coefficients réels, et ces fonctions linéaires égalées à zéro fournissent les équations des deux plans, qui constituent dans ce cas le cône asymptotique de la surface. Les deux plans se coupent suivant une droite parallèle à l'axe.

Faisons, dans la surface, une section dont le plan ne soit pas parallèle à cette droite; par le centre de cette section, qui est toujours une hyperbole, menons une droite parallèle à la droite d'intersection des plans $\varphi(x, y, z) = 0$; prenons pour origine le point de rencontre de cette droite avec la surface, et pour axe des Z cette parallèle, les axes OX et OY étant dans un plan parallèle au plan de la section. Le cône des directions asymptotiques a alors pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0$$

et l'équation de la surface sera

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2C''z = 0;$$

l'équation du plan diamétral de la direction α, β, γ est

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

ou

$$\alpha(Ax + B''y) + \beta(B''x + A'y) + \gamma C'' = 0.$$

Supposons que nous fassions dans la surface une section par un plan parallèle au plan des xy, $z = z_1$, la section sera une hyperbole dont l'équation, rapportée aux axes $\omega\xi$, $\omega\eta$, parallèles à Ox et Oy menés par le point ω où l'axe des Z rencontre le plan $z = z_1$, est

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2C''z_1 = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point A où la droite OA vient rencontrer le plan $Z = Z_1$; on aura

$$x_1 = \alpha r, \qquad y_1 = \beta r, \qquad z_1 = \gamma r:$$

l'équation du plan diamétral deviendra

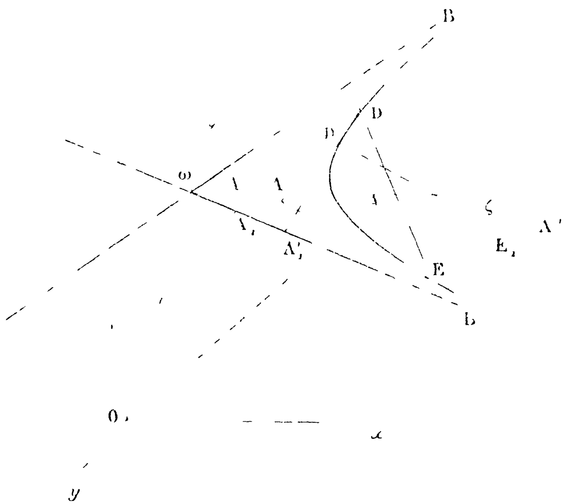
$$x_1(Ax + B''y) + y_1(B''x + A'y) + C''z_1 = 0,$$

en remplaçant α, β, γ par les valeurs x_1, y_1, z_1 qui leur sont proportionnelles.

Cette équation peut être considérée aussi comme l'équation de la section faite dans le plan diamétral par le plan $z = z_1$, cette section étant rapportée aux axes $\omega\xi$, $\omega\eta$.

Si maintenant nous considérons un point A′ du plan $\xi\omega\eta$, dont les coordonnées par rapport aux axes $\omega\xi$, $\omega\eta$

Fig. 2



sont $2x_1$, $2y_1$, la polaire de ce point A′ par rapport à la section de la surface par le plan $\xi\omega\eta$ aura pour équation

$$2x_1(Ax - B''y) + 2y_1(B''x - A'y) + 2C''z_1 = 0;$$

on voit, par suite, que la polaire DE du point A′ coïncide avec la trace du plan diamétral de OA sur le plan $z = z_1$.

Cette remarque permet de faire aisément l'étude des plans diamétraux singuliers du paraboloïde.

En effet, quand le point A se rapproche indéfiniment de l'une des asymptotes de l'hyperbole, point A' s'en rapproche également, puisqu'il est situé sur ωA, à la distance $\omega A' = 2\,\omega A$; mais alors la polaire de A' tend à devenir parallèle à l'asymptote ωB et, quand OA vient prendre la position OA_1, le point A' vient en A'_1 et la polaire de A'_1 devient la parallèle D_1E_1 à l'asymptote. Le plan diamétral de OA_1 devient alors le plan mené par D_1E_1 parallèlement à $O\omega$ et, par suite, au plan $O\omega B$; les plans $O\omega B$, $O\omega B'$ ne sont autre chose que les plans directeurs de la surface.

On a donc ce théorème :

Si la direction des cordes tend à devenir parallèle à un plan directeur, le plan diametral conjugué tend à devenir parallèle à ce même plan directeur.

Si la direction des cordes OA_1 se déplace dans le plan directeur $O\omega B$, le plan diamétral correspondant se déplace parallèlement au même plan directeur. A mesure que la direction OA_1 se rapproche de $O\omega$, dans le plan $O\omega B$, le plan diamétral correspondant D_1E_1 s'éloigne de ωB et, lorsque la direction OA_1 coincide avec $O\omega$, le plan diamétral correspondant est rejeté à l'infini, et cela n'arrive que pour la seule direction $O\omega$.

La figure précédente nous montre aussi que les plans diamétraux conjugués de deux directions OA, OA'' ne peuvent être parallèles que si les polaires des points correspondants A', A''', de coordonnées moitié moindres que celles de A, A'', sont parallèles ; ceci n'ayant lieu que si les points A', A''' décrivent la droite OA conjuguée de DE, on voit que les plans diamétraux conjugués de deux directions ne peuvent être parallèles que si ces directions sont dans un même plan avec l'axe de la surface, et cette condition est évidemment suffisante.

9. Les considérations précédentes nous montrent

quelles circonstances géométriques correspondent au cas où, la surface étant un paraboloïde, deux des trois plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ sont parallèles entre eux, le troisième les rencontrant à distance finie. Supposons que les plans $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ soient parallèles, ces plans sont diamétraux conjugués des directions OY, OZ; par suite, les axes des Y et des Z sont dans un même plan, parallèle à l'axe du paraboloïde : l'axe du paraboloïde est donc parallèle au plan des YZ.

Si deux des trois plans des centres se coupent à distance finie, le troisième plan, $f'_z = 0$ par exemple, étant rejeté à l'infini, l'axe des Z est parallèle à l'axe de la surface.

10. Proposons-nous maintenant de trouver la direction des cordes conjuguées d'un plan

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la direction cherchée : le plan diamétral correspondant a pour équation

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0,$$

d'où

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{d};$$

les premiers rapports nous donnent

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta + \nu\varphi'_\gamma}{a\lambda + b\mu + c\nu},$$

et, si la relation entre f'_x, f'_y, f'_z dont nous avons démontré l'existence est

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z + \pi = 0.$$

on aura

$$\lambda\varphi'_x + \mu\varphi'_y + \nu\varphi'_z = 0$$

et, par suite,

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Cette condition doit lier les coefficients de l'équation du plan donné pour qu'il soit diamétral d'une direction.

Cette relation exprime que le plan donné est parallèle à l'axe du paraboloïde.

Supposons, comme précédemment, que cette direction soit donnée par les plans

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

Des relations

$$\begin{aligned} A\lambda + B''\mu + B'\nu &= 0, \\ B''\lambda + A'\mu + B\nu &= 0, \\ a\lambda + b\mu + c\nu &= 0 \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire l'identité

$$\begin{vmatrix} A & B' & \frac{1}{2}\varphi'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}\varphi'_y \\ a & b & ax+by+cz \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$ax + by + cz = \lambda'\varphi'_x + \mu'\varphi'_y.$$

Cette identité, où λ' et μ' sont bien déterminés si nous supposons

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \lesseqgtr 0,$$

montre que le plan $ax + by + cz + d = 0$ est parallèle à la droite d'intersection des deux plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ qui définissent la direction de l'axe.

Les équations

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_6}{b} = \frac{2(C\alpha + C'6 + C''\gamma)}{d}$$

donnent la direction α, 6, γ. Si $2m$ est la valeur commune de ces rapports, on aura

$$\begin{aligned} A\alpha + B''6 + B'\gamma &= am, \\ B''\alpha + A'6 + B\gamma &= bm, \\ C\alpha + C'6 + C''\gamma &= dm; \end{aligned}$$

le déterminant du système de ces équations est différent de zéro si la surface est un paraboloïde; par suite, on tire de ces équations des valeurs α, 6, γ de la forme

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathcal{A}m, \\ 6 &= \mathcal{B}m, \\ \gamma &= \mathcal{C}m, \end{aligned}$$

qui déterminent avec $\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = 1$ deux valeurs égales et de signes contraires qui définissent une direction unique de cordes.

III. — Cylindres a centres.

11. Les cylindres à centres admettent une ligne de centres.

Ils sont caractérisés par l'existence d'une relation homogène identique entre les dérivées f'_x, f'_y, f'_z,

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

où les coefficients λ, μ, ν ne sont pas tous nuls.

Dans les cylindres à centres autres que le système de deux plans parallèles, on a $\delta = 0$; mais les mineurs du deuxième ordre de δ ne sont pas tous nuls. Nous supposerons dans ce qui suit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro; les plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ déterminent alors la ligne des centres.

Nous allons démontrer d'abord que tous les plans diamétraux passent par une même droite qui est la ligne des centres.

Pour cela, nous établirons la relation

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

en cherchant les valeurs des coefficients λ, μ, ν.

De l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0$$

on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x - C \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y - C' \\ B' & B & \frac{1}{2}f'_z - C'' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A & B' & f'_x \\ B'' & A' & f'_y \\ B' & B & f'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois déterminants caractéristiques du troisième ordre étant nuls dans le cas des cylindres, on aura

$$\begin{vmatrix} A & B' & f'_x \\ B'' & A' & f'_y \\ B' & B & f'_z \end{vmatrix} = 0;$$

cette relation est de la forme

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

où ν est différent de zéro.

On en déduit

$$f'_z = -\frac{\lambda}{\nu} f'_x - \frac{\mu}{\nu} f'_y;$$

l'équation du plan diamétral de la direction α, β, γ,

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0,$$

devient par la substitution de la valeur de f'_z en fonction de f'_x et f'_y,

$$(\alpha\nu - \lambda\gamma) f'_x + (\beta\nu - \gamma\mu) f'_y = 0,$$

ce qui montre qu'il passe par la droite d'intersection des deux plans

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

12. Pour que deux directions $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ donnent le même plan diamétral, il faut et il suffit que les directions considérées soient dans un même plan avec la direction de l'axe.

Soient

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0,$$
$$x\varphi'_{\alpha'} + y\varphi'_{\beta'} + z\varphi'_{\gamma'} + 2(C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma') = 0$$

les deux plans diamétraux ; pour qu'ils soient confondus, il faut que l'on ait

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma'}.$$

L'égalité des deux premiers rapports entraîne celle des deux autres, car de l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B & B & C' \end{vmatrix} = 0$$

on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B'' & A' & C' \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 2(Cx + C'y + C''z) \end{vmatrix} = 0$$

par suite,

$$\lambda'\varphi'_x + \mu'\varphi'_y + 2\nu'(Cx + C'y + C''z) = 0;$$

comme on a déjà

$$\lambda\varphi'_x + \mu\varphi'_y + \nu\varphi'_z = 0,$$

ces identités nous montrent que l'égalité

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}}$$

entraîne les autres.

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} = \frac{\varphi'_{\alpha'}}{\varphi'_{\beta'}},$$

et, si m est la valeur commune de ces rapports, elle nous montre que les deux directions $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont dans le plan

$$\varphi'_x - m\varphi'_y = 0.$$

Inversement, si la direction des cordes satisfait à cette relation, on aura

$$\varphi'_\alpha - m\varphi'_\beta = 0,$$
$$\varphi'_{\alpha'} - m\varphi'_{\beta'} = 0,$$

et l'on en déduit l'égalité des rapports

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_{\alpha'}} = \frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_{\beta'}} = \frac{\varphi'_\gamma}{\varphi'_{\gamma'}} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma'}$$

et, par suite, les plans diamétraux correspondants sont confondus.

13. Il n'existe qu'une seule direction de cordes pour laquelle le plan diamétral conjugué est indéterminé.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les quatre équations

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= 0,\\
C\alpha + C'\beta + C''\gamma &= 0
\end{aligned}$$

soient satisfaites pour un même système de valeurs de α, β, γ.

Les deux premières définissent la direction α, β, γ, les deux autres sont des conséquences des premières : on voit que c'est pour la seule direction de l'axe que le plan diamétral est indéterminé.

Plans diamétraux singuliers dans les cylindres.

14. Si les coefficients directeurs α, β, γ annulent $\varphi(x, y, z)$, l'équation du second degré en ρ s'abaisse au premier degré et l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

est le lieu des points tels que, si par ces points on mène des droites parallèles à la direction α, β, γ, ces droites ne rencontrent plus la surface.

Les plans diamétraux sont appelés, comme précédemment, *les plans asymptotes de la surface*.

La fonction $\varphi(x, y, z)$ ne peut s'annuler pour des valeurs réelles de x, y, z, que dans le cas où la surface est un cylindre hyperbolique.

Nous allons considérer ce dernier cas :

Prenons pour axe des z la droite d'intersection des deux plans $\varphi(x, y, z) = 0$, et pour plan des xy un plan quelconque.

L'équation de la surface sera de la forme

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 - 2B''xy + D = 0.$$

Le plan diamétral de la direction α, β, γ est alors

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0.$$

Si nous coupons la surface par un plan parallèle au plan des xy,

$$z = z_1.$$

Nous obtenons une hyperbole qui, rapportée à des axes $\omega\xi$, $\omega\eta$ parallèles à Ox, Oy menés par le point ω où le plan $z = z_1$ rencontre l'axe des z, a pour équation

$$A x^2 + A'y^2 + 2B''xy + D = 0.$$

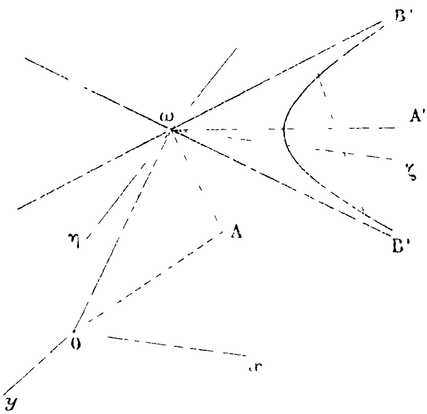
Si nous désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point A (*fig.* 3), où la droite OA de direction α, β, γ vient rencontrer le plan $z = z_1$, nous aurons

$$x_1 = \alpha r, \qquad y_1 = \beta r, \qquad z_1 = \gamma r;$$

l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$$

Fig. 3.



représente alors, dans le plan $\xi\omega\eta$, l'équation du diamètre conjugué de la direction ωA dans la conique du plan $z = z_1$. On voit que, si le point A se rapproche de l'asymptote ωB, le diamètre conjugué OA' de cette direction se rapproche de l'asymptote; le plan diamétral de OA étant le plan $O\omega A'$ tend à se confondre avec le plan asymptote $O\omega B$ lorsque la direction OA se rapproche indéfiniment du plan $O\omega B$. Lorsque OA se trouve dans le plan $O\omega B$, le plan diamétral conjugué correspondant est le plan $O\omega B$.

On voit, de plus, que si le point A se déplace sur la droite ωA, le plan diamétral de OA reste le même, et cette condition est nécessaire pour que le plan $O\omega A'$ reste conjugué de OA; par suite, pour que deux directions de cordes $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'. \beta', \gamma'$ donnent le même plan diamétral, il faut et il suffit que ces directions soient dans un même plan avec l'axe.

15. Ceci nous explique quelles circonstances géométriques se présentent lorsque, la surface étant un cylindre, deux des trois plans des centres sont confondus. Supposons que $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ soient deux plans de centres confondus. Ces plans étant conjugués des directions OY et OZ, les deux directions OY et OZ sont dans un même plan avec celle de l'axe; par suite, l'axe de la surface est parallèle au plan YOZ.

Si les plans $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ se coupent à distance finie et si l'équation $f'_z = 0$ est une identité, l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

représente un cylindre dont l'axe est parallèle à l'axe des z, car la direction de l'axe est la seule pour laquelle le plan diamétral correspondant est indéterminé, comme on le voit aisément sur la figure précédente.

16. Proposons-nous maintenant de trouver la direction conjuguée des cordes d'un plan

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Soit α, β, γ la direction cherchée. Le plan diamétral correspondant est

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2C(\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0;$$

il faut que l'on ait

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b} = \frac{\varphi'_\gamma}{c} = \frac{2(C\alpha + C'\beta + C''\gamma)}{d}.$$

Supposons encore que les deux plans $f''_x = 0$, $f''_y = 0$ se coupent à distance finie, et

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Nous avons établi les identités

$$\lambda\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta + \nu\varphi'_\gamma = 0,$$
$$\lambda'\varphi'_\alpha + \mu\varphi'_\beta + 2\nu'(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0;$$

on en conclut les conditions

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0,$$
$$a\lambda' + b\mu' + d\nu' = 0,$$

auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation du plan donné pour qu'il puisse être diamétral d'une direction.

Ces conditions expriment que le plan donné passe par l'axe de la surface.

En effet, de l'identité

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0$$

on déduit

$$A\lambda + B''\mu + B'\nu = 0,$$
$$B''\lambda + A'\mu - B\nu = 0,$$

et l'on a de plus

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Ces trois équations nous donnent

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons, pour abréger, par P le premier membre de l'équation du plan donné

$$P = ax + by + cz + d;$$

de l'équation précédente nous déduisons

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x - C \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y - C' \\ a & b & P - d \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y \\ a & b & P \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ a & b & d \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de voir que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ a & b & d \end{vmatrix}$$

est nul.

En effet, de l'identité

$$\lambda'\varphi'_x + \mu'\varphi'_y + 2\nu'(Cx + C'y + C''z) = 0$$

on déduit

$$A\lambda' + B''\mu' + C\nu' = 0,$$
$$B''\lambda' + A'\mu' + C'\nu' = 0:$$

on a de plus

$$a\lambda' + b\mu' + d\nu' = 0,$$

par suite,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ a & b & d \end{vmatrix} = 0;$$

la relation entre f'_x, f'_y et P devient donc

$$\begin{vmatrix} A & B'' & \frac{1}{2}f'_x \\ B'' & A' & \frac{1}{2}f'_y \\ a & b & P \end{vmatrix} = 0,$$

et dans cette relation, le coefficient de P étant différent de zéro, P est une fonction linéaire et homogène de f'_x et f'_y; par suite le plan $P = 0$ passe par l'axe du cylindre.

L'équation

$$\frac{\varphi'_\alpha}{a} = \frac{\varphi'_\beta}{b},$$

qui entraîne toutes les autres, nous donne le plan auquel toutes les cordes conjuguées du plan $P = 0$ sont parallèles.

IV. — Cylindre parabolique.

17. Lorsque l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente un cylindre parabolique, l'ensemble homogène des termes du second degré est le carré d'une fonction linéaire; les dérivées partielles de la fonction $\varphi(x, y, z)$ sont donc de la forme

$$\varphi'_x = 2l\ \Theta(x, y, z),$$
$$\varphi'_y = 2m\Theta(x, y, z),$$
$$\varphi'_z = 2n\ \Theta(x, y, z).$$

$\Theta(x, y, z)$ étant une fonction linéaire de x, y, z.

Le plan diamétral de la direction α, β, γ devient dans ce cas

$$(lx + my + nz)\,\Theta(\alpha, \beta, \gamma) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

On voit que tous les plans diamétraux sont parallèles entre eux.

18. Pour que deux directions de cordes α, β, γ, α', β', γ' donnent le même plan diamétral, il faut et il suffit que ces cordes soient dans un même plan parallèle aux génératrices du cylindre.

Car il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{C\alpha + C'\beta + C''\gamma} = \frac{\Theta(\alpha', \beta', \gamma')}{C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma'},$$

ce qui indique que la direction des cordes est parallèle au plan

$$\Theta(x, y, z) - m(Cx + C'y + C''z) = 0,$$

m étant la valeur de l'un des membres de l'égalité précédente.

Inversement, si la direction des cordes satisfait à la relation

$$\Theta(x, y, z) - m(Cx + C'y + C''z) = 0,$$

les plans diamétraux correspondants sont les mêmes.

Plans diamétraux singuliers.

19. Si la direction des cordes annule $\varphi(x, y, z)$, le plan diamétral correspondant est, comme précédemment, le lieu des droites qui, menées parallèlement à la direction α, β, γ, ne rencontrent plus la surface.

Dans ce cas, le plan diamétral est rejeté à l'infini, car $\varphi(x, y, z)$ est, à une constante près, le carré de

$$\Theta(x, y, z).$$

L'égalité $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ entraîne $\Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, et, par suite, l'équation du plan diamétral se réduit à

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Le plan diamétral sera indéterminé si les coefficients

α, β, γ satisfont aux deux conditions

$$\Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0,$$

c'est-à-dire si la direction des cordes est parallèle aux génératrices du cylindre.

On peut aisément suivre la variation de la position du plan diamétral lorsque la direction des cordes varie.

Prenons pour axe des z une génératrice du cylindre, pour origine un point quelconque de cette génératrice, pour axe des x et des y deux droites quelconques passant par ce point. L'équation de la surface est alors

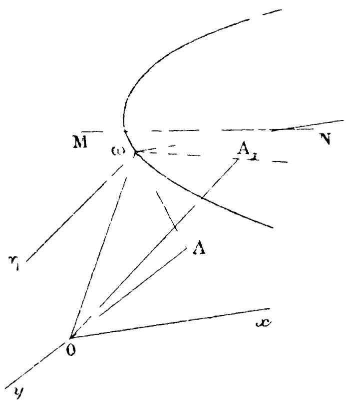
$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0$$

avec

$$AA' - B''^2 = 0.$$

Faisons une section dans la surface par le plan $z = z_1$: cette section est une parabole, et la trace du plan dia-

Fig. 4.



métral de OA (*fig.* 4) sur le plan $z = z_1$ est précisément le diamètre MN de la direction ωA dans la parabole.

Si le point A se déplace sur ωA, c'est-à-dire si OA se déplace dans le plan $O\omega A$, le plan diamétral reste le même; à mesure que le point A se rapproche de A_1 situé sur la droite ωA_1 parallèle à MN, le diamètre correspondant à la direction ωA s'éloigne à l'infini : par suite le plan diamétral de OA_1 est rejeté à l'infini.

Si le point A s'approche de ω, le plan diamétral correspondant à OA a une position bien déterminée pour chaque direction de OA_1 suivie par le point A, mais le plan diamétral prend une position quelconque si l'on considère des directions quelconques OA; par suite, le plan diamétral conjugué de $O\omega$ est indéterminé.

20. Étant donné le plan $ax + by + cz + d = 0$, proposons-nous de déterminer le plan des directions des cordes conjuguées de ce plan.

Pour qu'il soit diamétral d'une direction $\alpha\beta\gamma$ de cordes, il faut que

$$\frac{l\,\Theta(\alpha\beta\gamma)}{a} = \frac{m\,\Theta(\alpha\beta\gamma)}{b} = \frac{n\,\Theta(\alpha\beta\gamma)}{c} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{d}.$$

On en tire

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{C\alpha + C'\beta + C''\gamma}{d\,\Theta(\alpha\beta\gamma)} = \lambda,$$

soit λ la valeur de ce rapport.

On voit que

$$\frac{lx + my + nz}{ax + by + cz} = \lambda;$$

le plan donné doit donc être parallèle au plan

$$lx + my + nz = 0$$

ou

$$\Theta(x, y, z) = 0:$$

cette condition suffit pour qu'il soit diamétral d'une infinité de directions situées dans un plan, car l'équation

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = \lambda\, d\Theta(\alpha, \beta, \gamma)$$

nous montre que, si la direction des cordes est dans le plan

$$Cx + C'y + C''z = \lambda\, d\Theta(x, y, z),$$

les trois équations d'identification sont satisfaites, et toutes les droites tracées dans ce plan ont pour plan diamétral le plan donné.

Enfin, si le cylindre parabolique se réduit à un système de deux plans parallèles, toutes les directions de cordes donnent le même plan diamétral : nous ne nous y arrêterons pas.