Nouvelles annales de mathématiques

Lemaire

Note sur la question du concours général de mathématiques spéciales en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 243-246

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__243_1>

NOTE SUR LA QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES EN 1888;

Par M. LEMAIRE,
Professeur au lycée de Lorient.

Transformant en coordonnées polaires l'équation de la courbe C, nous obtenons une équation de la forme

$$\rho^4 - 2F(\omega)\rho^2 + K = 0.$$

K étant indépendant de ω. Le produit des racines de cette équation est constant. Nous en concluons que la courbe C est transformable en elle-même par rayons vecteurs réciproques, l'origine d'inversion étant le centre O de l'ellipse donnée, et la puissance $\sqrt{K}$. On sait que les courbes qui jouissent de cette propriété, auxquelles on a donné le nom de *courbes anallagmatiques,* sont des enveloppes de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe, réel ou imaginaire, et ayant leurs centres sur une courbe fixe, dite *déférente.* Il est facile de trouver, dans le cas qui nous occupe, le cercle fixe et la déférente : celle-ci est une conique.

Cherchons, en effet, l'enveloppe d'un cercle

$$(x-p)^2+(y-q)^2-\rho^2=0$$

coupant orthogonalement le cercle fixe

$$x^2+y^2-R^2=0$$

et ayant son centre sur la conique

$$Ax^2+By^2-1=0:$$

ρ, p, q satisfont aux relations

$$Ap^2+Bq^2-1=0,$$
$$p^2+q^2=R^2+\rho^2.$$

L'équation du cercle variable peut s'écrire

$$(x-p)^2+(y-q)^2-p^2-q^2+R^2=0$$

ou

$$x^2+y^2-2px-2qy+R^2=0,$$

avec la condition

$$Ap^2+Bq^2-1=0.$$

Éliminons p et q entre ces deux relations et

$$\frac{Ap}{x}=\frac{Bq}{y};$$

nous avons

$$\frac{Ap}{x} = \frac{Bq}{y} = \frac{2(Ap^2 + Bq^2)}{2(px + qy)} = \frac{2}{x^2 + y^2 + R^2};$$

d'où

$$p = \frac{2x}{A(x^2 + y^2 + R^2)},$$

$$q = \frac{2y}{B(x^2 + y^2 + R^2)}.$$

L'enveloppe a donc pour équation

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + R^2)^2 - 4\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}\right) = 0.$$

On trouve bien une équation de la forme de (C)

$$(C) \quad (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - \frac{4}{\tan^2\theta}(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

L'identification donne

$$R^2 = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + \frac{4}{\tan^2\theta}a^2b^2},$$

$$\frac{2}{A} = (a^2 + b^2) + \frac{2}{\tan^2\theta}b^2 - R^2,$$

$$\frac{2}{B} = (a^2 + b^2) + \frac{2}{\tan^2\theta}a^2 + R^2.$$

Pour simplifier l'écriture, conservons les notations (A, B, R). Tout ce que nous dirions de la courbe (1) s'appliquera à la courbe (C). (1) admet pour asymptotes les droites isotropes du plan. Donc on peut dire que tout cercle du plan a avec cette courbe aux points cycliques une bitangente imaginaire.

Un cercle la touchera donc en quatre points, s'il a avec elle deux points de contact à distance finie.

Or les cercles qui ont pour enveloppe (1) lui sont précisément bitangents : tout revient donc à chercher combien de ces cercles sont tangents à une droite donnée

$$(\mathrm{D}) \qquad mx + ny + 1 = 0.$$

La condition de contact du cercle variable

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + R^2 = 0$$

avec la droite D est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -p & m \\ 0 & 1 & -q & n \\ -p & -q & R^2 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(np - mq)^2 - 2(mp + nq) = (m^2 + n^2)R^2 + 1.$$

Finalement, nous voyons que le centre de tout cercle répondant à la question se trouve à la fois sur les deux coniques

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0,$$
$$(nx - my)^2 - 2(mx + ny) = (m^2 + n^2)R^2 + 1.$$

Donc il y a au plus quatre cercles pareils.