Nouvelles annales de mathématiques

V. Jamet

Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 228-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__228_1>

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES;

PAR M. V. JAMET.

1. LEMME. — *Le polynôme entier, de degré n, $F(x)$, est identiquement nul, si l'on peut trouver des quantités a, b, c, ..., l, telles que l'on ait identiquement*

$$\begin{array}{llll} F(a) = 0, & F'(a) = 0, & \ldots, & F^{(\alpha-1)}(a) = 0, \\ F(b) = 0, & F'(b) = 0, & \ldots, & F^{(\beta-1)}(b) = 0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ F(l) = 0, & F'(l) = 0, & \ldots, & F^{(\lambda-1)}(l) = 0 \end{array}$$

et

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda > n;$$

car, s'il en était autrement, l'équation $F(x) = 0$ aurait α racines égales à a, β racines égales à b, ..., λ racines égales à l; par conséquent, plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré.

Il s'ensuit que *deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, dont le premier est de degré n, le second de degré m, sont* *identiques, si l'on a*

$$\begin{array}{llll}
f(a)=\varphi(a), & f'(a)=\varphi'(a), & \ldots & f^{(\alpha-1)}(a)=\varphi^{(\alpha-1)}(a),\\
f(b)=\varphi(b), & f'(b)=\varphi'(b), & \ldots & f^{(\beta-1)}(b)=\varphi^{(\beta-1)}(b),\\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(l)=\varphi(l), & f'(l)=\varphi'(l), & \ldots, & f^{(\lambda-1)}(l)=\varphi^{(\lambda-1)}(l)
\end{array}$$

et

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda > n \geqq m;$$

car la fonction entière $f(x)-\varphi(x)$ est alors identiquement nulle.

2. Cela posé, soit $f(x)$ un polynôme entier de degré inférieur au degré de la fonction entière $F(x)$ définie comme il suit :

$$F(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda.$$

Soient aussi

$$\begin{aligned}
\varpi_\alpha(x) &= (x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda,\\
\varpi_\beta(x) &= (x-a)^\alpha(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{F(x)} = {} & \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\alpha-1}}\,D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)}\right]\\
& + \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\beta-1}}\,D_b^{\beta-1}\left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)}\right]\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{\lambda-1}}\,D_l^{\lambda-1}\left[\frac{f(l)}{(x-l)\varpi_\lambda(l)}\right].
\end{aligned}$$

La fonction $\varphi(x)$, définie par cette égalité, est une fonction entière, car l'expression

$$D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)}\right] \tag{1}$$

est égale à une fonction rationnelle de x, dont le dénominateur est $(x-a)^\alpha$. Le produit de cette expression par $F(x)$ est donc une fonction entière de x, et il en est de même pour tous les autres termes du second membre de l'égalité précédente ; il faut remarquer, en outre, que la fonction $\varphi(x)$ est d'un degré inférieur à celui de $F(x)$; car le numérateur de la fraction rationnelle équivalente à (1) est d'un degré inférieur à α ; de même, le deuxième terme est une fonction rationnelle, dont le numérateur est d'un degré inférieur à β, ...

3. Soit maintenant p un nombre entier inférieur à α ; proposons-nous de calculer la valeur que prend $\varphi^{(p)}(x)$, c'est-à-dire la dérivée d'ordre p de $\varphi(x)$ quand on y remplace x par a.

Observons, à cet effet, que la dérivée d'ordre p de l'expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\beta-1} D_b^{\beta-1}\left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)}\right] F(x)$$

sera nulle, ainsi que les dérivées des expressions analogues, quand on y remplacera x par a ; il y aura exception pour l'expression suivante :

$$(2) \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots\alpha-1} D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)}\right] F(x).$$

Je dis que celle-ci sera égale à $f^{(p)}(a)$. En effet, si dans l'expression (2) on applique à la dérivée d'ordre $\alpha-1$ qu'elle renferme la formule qui fait connaître les dérivées successives du produit de deux fonctions données ; si l'on pose

$$\frac{f(a)}{\varpi_\alpha(a)} = \psi(a),$$

et si l'on multiplie tous les termes du développement obtenu par $F(x)$, ou $(x-a)^\alpha \varpi_\alpha(x)$, on voit que cette expression est égale à

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(a)\varpi_\alpha(x) + \psi'(a)\frac{x-a}{1}\varpi_\alpha(x)\\ &\qquad + \psi''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}\varpi_\alpha(x) + \ldots\\ &\qquad + \psi^{(\alpha-1)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2.3\ldots\alpha-1}\varpi_\alpha(x). \end{aligned}\right.$$

Dans ce dernier développement, considérons le terme

$$\psi^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{1.2.3\ldots i}\varpi_\alpha(x)$$

et observons que sa dérivée d'ordre p est nulle pour $x=a$, si l'on suppose $i>p$. Dans le cas contraire, elle est égale à

$$\frac{\psi^{(i)}(a)}{1.2.3\ldots i}\left[(x-a)^i\varpi_\alpha^{(p)}(x) + \frac{p}{1}i(x-a)^{i-1}\varpi^{(p-1)}(x) + \ldots \right.$$
$$\left. + p(p-1)(p-2)\ldots(p-i+1)\varpi_\alpha^{(p-i)}(x)\right].$$

Pour $x=a$, elle se réduit à

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.2.3\ldots i}\psi^{i}(a)\varpi_\alpha^{(p-i)}(a).$$

Donc, pour $x=a$, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction (3) se réduit à

$$\psi(a)\varpi_\alpha^{(p)}(a) + \frac{p}{1}\psi'(a)\varpi_\alpha^{(p-1)}(a)$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}\psi''(a)\varpi_\alpha^{(p-2)}(a) + \ldots + \psi^{(p)}(a)\varpi_\alpha(a),$$

c'est-à-dire à

$$D_p^{\hat{}}[\psi(a)\varpi_\alpha(a)],$$

ou $f^{(p)}(a)$.

4. On conclut de là les identités suivantes :

$$
\begin{array}{lllll}
\varphi(a) = f(a), & \varphi'(a) = f'(a), & \varphi''(a) = f''(a), & \ldots & \varphi^{(\alpha-1)}(a) = f^{(\alpha-1)}(a), \\
\varphi(b) = f(b), & \varphi'(b) = f'(b), & \varphi''(b) = f''(b), & \ldots & \varphi^{(\beta-1)}(b) = f^{(\beta-1)}(b), \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\varphi(l) = f(l), & \varphi'(l) = f'(l), & \varphi''(l) = f''(l), & \ldots & \varphi^{(\lambda-1)}(l) = f^{(\lambda-1)}(l).
\end{array}
$$

Donc la fonction φ est identique à la fonction f, et l'égalité qui définit la fonction $\varphi(x)$ constitue une formule propre à faire connaître un mode de décomposition de la fonction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en fractions simples, savoir

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{1}{1.2.3\ldots\alpha-1} D_a^{\alpha-1}\left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)}\right] \\
& + \frac{1}{1.2.3\ldots\beta-1} D_b^{\beta-1}\left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)}\right] + \ldots.
\end{aligned}
$$