De Salvert

Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et les systèmes orthogonaux du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 214-228
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__214_0>

SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOIDE ET LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX DU SECOND ORDRE;

PAR M. LE VICOMTE DE SALVERT,
Docteur ès Sciences,
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

Si on laisse de côté le point de vue géométrique, pour n'envisager que les conséquences analytiques et le parti qu'on en peut tirer, le principal intérêt qui s'attache au problème de la détermination des lignes de courbure d'une surface donnée consiste en ce que la connaissance de ces lignes permettra de former immédiatement un système de coordonnées orthogonales sur cette surface, dont l'emploi facilitera notablement ensuite la solution de la plupart des questions soit géométriques, soit mécaniques, que l'on pourra se poser à propos de cette surface. En second lieu, cette solution supposée obtenue constituera un premier pas vers la solution d'un problème encore plus important, mais bien autrement difficile, à savoir la recherche d'un système triple orthogonal (en supposant qu'il en existe un) dont la surface donnée fasse partie. Aussi la solution du problème des lignes de courbure d'une surface donnée doit-elle toujours, à notre sens, être poursuivie sans perdre de vue ce but capital, et la méthode employée pour cette recherche nous semblera-t-elle meilleure ou moins bonne suivant qu'elle y tendra plus ou moins directement.

Or la plupart des auteurs des traités d'Analyse, lorsqu'ils veulent montrer, à propos de l'ellipsoïde, une application de la méthode générale donnée pour cet objet, présentent la solution sous la forme donnée par Monge, laquelle suffit bien à la vérité pour mettre en relief la propriété géométrique essentielle de ces lignes de courbure, à savoir que leurs projections sur les plans principaux de la surface sont des ellipses ou des hyperboles, mais remplit fort mal par ailleurs la condition fondamentale que nous venons de rappeler, par suite de radicaux qui s'introduisent forcément dans ces équations, lorsque l'on veut représenter isolément l'un ou l'autre des deux systèmes de ces lignes de courbure.

Il nous a semblé que l'on pouvait, au contraire, diriger l'application de la méthode générale, c'est-à-dire l'intégration des équations classiques que l'on sait, de façon à donner pleine satisfaction à ce *desideratum*, en s'arrangeant pour obtenir cette même solution sous la forme symétrique, si simple et si commode, que donne immédiatement l'application du théorème de Dupin au système triple des surfaces homofocales du second ordre, mais sans supposer en quoi que ce soit, bien entendu, l'existence de ce système. Et, dès lors, cette solution une fois obtenue constituera une voie non seulement légitime, mais qui sera peut-être la plus logique et la plus naturelle (nous ne disons pas pour cela la meilleure et la plus rapide) pour arriver sans effort d'invention à la notion si féconde de ce remarquable système, notion en réalité fort compliquée, malgré l'apparence de simplicité qu'elle doit à sa merveilleuse symétrie, et que les illustres inventeurs Lamé et Jacobi posent d'emblée dans leurs Ouvrages, comme par une sorte de divination, sans avoir jamais fait connaître par quel enchaînement logique de raisonnements et de calculs ils étaient parvenus effectivement à la découvrir.

1. Il suffira pour cela de mettre à profit la remarque suivante :

Étant donnée une surface quelconque

$$F(x, y, z) = 0,$$

si l'on suppose que l'on ait déterminé par l'intégration de l'équation différentielle connue l'ensemble de ses lignes de courbure, et que l'on représente par λ et μ les paramètres correspondant à chacun des deux systèmes, cet ensemble sera alors défini par trois équations telles que

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = \lambda, \qquad F_2(x, y, z) = \mu,$$

et l'on obtiendra isolément soit le premier, soit le second système en associant la seconde ou la troisième de ces équations à la première, qui est par hypothèse l'équation de la surface donnée.

Or, si l'on suppose ces trois équations résolues par rapport à x, y, z, c'est-à-dire mises sous la forme

$$(2) \qquad x = f(\lambda, \mu), \qquad y = \varphi(\lambda, \mu), \qquad z = \psi(\lambda, \mu),$$

on pourra envisager ces trois dernières équations comme représentant isolément à volonté l'un ou l'autre des deux systèmes, à la condition d'y considérer comme une constante celui des deux paramètres λ ou μ qui lui est relatif, et l'autre comme une variable auxiliaire analogue au temps ou à l'arc de courbe, en fonction de laquelle les coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont exprimées, et qu'il y aura avantage dès lors, par une raison évidente de symétrie, à prendre pour variable indépendante dans tous les calculs relatifs à cette courbe.

Cela posé, l'équation différentielle des lignes de courbure, qui est en général, pour la surface $F(x, y, z) = 0$,

$$\begin{vmatrix} dx, & \dfrac{dF}{dx}, & d\left(\dfrac{dF}{dx}\right) \\ dy, & \dfrac{dF}{dy}, & d\left(\dfrac{dF}{dy}\right) \\ dz, & \dfrac{dF}{dz}, & d\left(\dfrac{dF}{dz}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

dans le cas particulier de l'ellipsoïde

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

est la suivante

$$\begin{vmatrix} dx, & \dfrac{x}{a^2}, & \dfrac{dx}{a^2} \\ dy, & \dfrac{y}{b^2}, & \dfrac{dy}{b^2} \\ dz, & \dfrac{z}{c^2}, & \dfrac{dz}{c^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{x}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) dy\, dz + \frac{y}{b^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) dz\, dx + \frac{z}{c^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) dx\, dy = 0,$$

laquelle, en multipliant par $4xyz$, peut encore être écrite

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(b^2 - c^2)\frac{x^2}{a^2}\,\frac{2y\, dy}{b^2}\,\frac{2z\, dz}{c^2} \\ &+ (c^2 - a^2)\frac{y^2}{b^2}\,\frac{2z\, dz}{c^2}\,\frac{2x\, dx}{a^2} \\ &+ (a^2 - b^2)\frac{z^2}{c^2}\,\frac{2x\, dx}{a^2}\,\frac{2y\, dy}{b^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si nous envisageons d'abord spécialement le premier système de lignes de courbure au paramètre λ, et que nous nous proposions d'obtenir des équations sous la forme (2), en y considérant, ainsi que nous l'avons expliqué, μ comme une variable auxiliaire, on aperçoit de suite qu'on pourra satisfaire aux deux équations (3) et (4) en prenant pour $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$ des fonctions linéaires de la variable indépendante μ, c'est-à-dire en posant

$$\frac{x^2}{a^2} = A_1\mu + A'_1, \qquad \frac{2x\,dx}{a^2} = A_1\,d\mu,$$

$$\frac{y^2}{b^2} = B_1\mu + B'_1, \qquad \frac{2y\,dy}{b^2} = B_1\,d\mu,$$

$$\frac{z^2}{c^2} = C_1\mu + C'_1, \qquad \frac{2z\,dz}{c^2} = C_1\,d\mu,$$

les coefficients A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1 étant dès lors des fonctions de λ, car, par la substitution de ces valeurs, les deux équations (3) et (4) qui définissent les lignes de courbure, devenant

$$(A_1 + B_1 + C_1)\mu + A'_1 + B'_1 + C'_1 = 1,$$

$$\begin{aligned}[(b^2 - c^2)(A_1\mu + A'_1)B_1C_1 &+ (c^2 - a^2)(B_1\mu + B'_1)C_1A_1 \\ &+ (a^2 - b^2)(C_1\mu + C'_1)A_1B_1]\,d\mu^2 = 0,\end{aligned}$$

dont la seconde se réduit simplement à

$$A_1B_1C_1\left[(b^2 - c^2)\frac{A'_1}{A_1} + (c^2 - a^2)\frac{B'_1}{B_1} + (a^2 - b^2)\frac{C'_1}{C_1}\right]d\mu^2 = 0,$$

on voit immédiatement qu'elles seront vérifiées, en disposant des constantes de manière à satisfaire aux trois conditions

$$(5) \qquad A_1 + B_1 + C_1 = 0, \qquad A'_1 + B'_1 + C'_1 = 1,$$

$$(6) \qquad (b^2 - c^2)\frac{A'_1}{A_1} + (c^2 - a^2)\frac{B'_1}{B_1} + (a^2 - b^2)\frac{C'_1}{C_1} = 0.$$

On reconnaîtrait exactement de même que l'on obtiendra les équations du second système au paramètre μ, en prenant pour $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$ les fonctions linéaires de λ

$$\frac{x^2}{a^2} = A_2\lambda + A'_2, \qquad \frac{y^2}{b^2} = B_2\lambda + B'_2, \qquad \frac{z^2}{c^2} = C_2\lambda + C'_2,$$

dans lesquelles les coefficients A_2, B_2, ..., C'_2, qui sont, par hypothèse, des fonctions de μ, vérifieraient les conditions

$$(7) \qquad A_2 + B_2 - C_2 = 0, \qquad A'_2 + B'_2 + C'_2 = 1,$$

$$(8) \qquad (b^2 - c^2)\frac{A'_2}{A_2} + (c^2 - a^2)\frac{B'_2}{B_2} + (a^2 - b^2)\frac{C'_2}{C_2} = 0.$$

Ainsi donc on pourra obtenir simultanément les trois équations des deux systèmes de lignes de courbure sous la forme (2), en prenant pour $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$ des expressions qui soient linéaires à la fois par rapport à λ et par rapport à μ. On satisfera à cette double condition de la façon la plus simple possible, en prenant pour ces quantités des expressions, telles que

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= A(\lambda + g)(\mu + l), \\ \frac{y^2}{b^2} &= B(\lambda + h)(\mu + m), \\ \frac{z^2}{c^2} &= C(\lambda + k)(\mu + n), \end{aligned} \right.$$

les coefficients A, B, C, g, h, k, l, m, n étant à présent de véritables constantes, auquel cas ceux que nous avons appelés précédemment A_1, B_1, ..., C'_1; A_2, ..., C'_2 auront alors pour expressions

$$\begin{array}{lll} A_1 = A(\lambda + g), & B_1 = B(\lambda + h), & C_1 = C(\lambda + k), \\ A'_1 = A(\lambda + g)l, & B'_1 = B(\lambda + h)m, & C'_1 = C(\lambda + k)n, \\ A_2 = A(\mu + l), & B_2 = B(\mu + m), & C_2 = C(\mu + n), \\ A'_2 = A(\mu + l)g, & B'_2 = B(\mu + m)h, & C'_2 = C(\mu + n)k. \end{array}$$

Avec ces valeurs, les conditions (5) et (7) étant alors

$$
\begin{aligned}
(A + B + C)\lambda + Ag + Bh + Ck &= 0,\\
(A + B + C)\mu + Al + Bm + Cn &= 0,\\
(Al + Bm + Cn)\lambda + Agl + Bhm + Ckn &= 1,\\
(Ag + Bh + Ck)\mu + Alg + Bmh + Cnk &= 1,
\end{aligned}
$$

exigeront, pour être satisfaites quelles que soient λ et μ, c'est-à-dire quelle que soit la ligne de l'un ou l'autre système que l'on considère,

$$
\begin{aligned}
&(10)\qquad A + B + C = 0, \qquad Agl + Bhm + Ckn = 1,\\
&(11)\qquad Ag + Bh + Ck = 0, \qquad Al + Bm + Cn = 0.
\end{aligned}
$$

Enfin les deux conditions (6) et (8) deviendront de même

$$
(12)\qquad \left\{
\begin{aligned}
(b^2 - c^2)l + (c^2 - a^2)m + (a^2 - b^2)n &= 0,\\
(b^2 - c^2)g + (c^2 - a^2)h + (a^2 - b^2)k &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Outre les conditions (10), (11), (12), une nouvelle équation entre les constantes résulte de ce que les deux systèmes de lignes de courbure se coupent orthogonalement, condition exprimée dans le cas actuel par l'équation

$$
(13)\qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0;
$$

car, au point de rencontre, les cosinus directeurs de l'élément de ligne du premier système sont évidemment proportionnels à $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y}{\partial \mu}$, $\frac{\partial z}{\partial \mu}$, μ étant la variable indépendante pour cette courbe, et λ une constante; et de même les cosinus directeurs de l'élément de ligne du second système sont proportionnels à $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$, ces différentes dérivées étant les dérivées partielles que fournissent les expressions (2).

Or, si l'on a égard aux valeurs (9) de x, y, z, qui représentent ces expressions (2) dans le cas actuel et qui deviennent, en extrayant les racines,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \pm\, a\sqrt{A(\lambda - g)(\mu - l)},\\ y &= \pm\, b\sqrt{B(\lambda - h)(\mu - m)},\\ z &= \pm\, c\sqrt{C(\lambda - k)(\mu - n)}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\lambda} &= \pm\frac{a\sqrt{A}}{2}\sqrt{\frac{\mu - l}{\lambda - g}}, & \frac{\partial x}{\partial\mu} &= \pm\frac{a\sqrt{A}}{2}\sqrt{\frac{\lambda - g}{\mu - l}},\\ \frac{\partial y}{\partial\lambda} &= \pm\frac{b\sqrt{B}}{2}\sqrt{\frac{\mu - m}{\lambda - h}}, & \frac{\partial y}{\partial\mu} &= \pm\frac{b\sqrt{B}}{2}\sqrt{\frac{\lambda - h}{\mu - m}},\\ \frac{\partial z}{\partial\lambda} &= \pm\frac{c\sqrt{C}}{2}\sqrt{\frac{\mu - n}{\lambda - k}}, & \frac{\partial z}{\partial\mu} &= \pm\frac{c\sqrt{C}}{2}\sqrt{\frac{\lambda - k}{\mu - n}}; \end{aligned}$$

la condition ci-dessus (13) est simplement, en multipliant par 4,

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 0.$$

Si l'on joint cette dernière équation à la première équation (10), et qu'on les mette sous la forme

$$\frac{A}{b^2 - c^2} = \frac{B}{c^2 - a^2} = \frac{C}{a^2 - b^2} = G,$$

en introduisant une nouvelle indéterminée G, on voit qu'on pourra les remplacer par les trois autres

$$(15)\quad A = (b^2 - c^2)G,\quad B = (c^2 - a^2)G,\quad C = (c^2 - a^2)G,$$

et dès lors, en substituant ces valeurs dans les équations (11) et (10), et remarquant que les premières se confondent alors avec les équations (12), on voit que l'on n'a, en définitive, à satisfaire jusqu'ici qu'aux trois seules conditions

$$(16)\quad \begin{cases} (b^2-c^2)l + (c^2-a^2)m + (a^2-b^2)n = 0, \\ (b^2-c^2)g + (c^2-a^2)h + (a^2-b^2)k = 0, \\ G[(b^2-c^2)gl + (c^2-a^2)hm + (a^2-b^2)kn] = 1. \end{cases}$$

Mais la symétrie complète manifestée entre les deux systèmes de lignes de courbure par ce fait, que cet ensemble de conditions subsiste quand on y permute ensemble les deux groupes (g, h, k), (l, m, n), impose de plus trois dernières conditions, qui achèvent de déterminer les constantes (ou plus exactement leurs rapports). Il faudra, en effet, dans ce même ordre d'idées, que, si l'on a obtenu par les formules (14), à l'aide de ces dernières équations (15) et (16), une solution du problème correspondant à un certain système de valeurs des coefficients g, h, k, l, m, n, G, on obtienne encore une nouvelle solution avec ces mêmes valeurs en permutant les paramètres λ et μ ou, ce qui revient au même, en écrivant dans les formules (14) g, h, k à la place de l, m, n, et *vice versa*. Dès lors, il est nécessaire, pour l'identification des valeurs (9) ou (14) correspondant aux deux solutions, que l'on ait

$$g = l, \qquad h = m, \qquad k = n.$$

Étant données ces nouvelles conditions, le mode le plus simple de satisfaire aux deux premières équations (16) consiste à prendre

$$(17)\quad \begin{cases} \text{soit} \quad g = l = 1, \qquad h = m = 1, \qquad k = n = 1, \\ \text{soit} \quad g = l = a^2, \qquad h = m = b^2, \qquad k = n = c^2. \end{cases}$$

La première de ces deux solutions est inadmissible, parce qu'il en résulterait par la dernière équation (16) pour G, et, par conséquent, par les équations (15) pour A, B, C, des valeurs infinies. En adoptant donc la seconde, on aura, au contraire,

$$(18)\quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{(b^2-c^2)a^4+(c^2-a^2)b^4+(a^2-b^2)c^4} \\ = \dfrac{1}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)} \end{cases}$$

et, par suite, pour A, B, C, par les équations (15),

$$A = \frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$B = \frac{1}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$C = \frac{1}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

En reportant enfin ces valeurs, ainsi que celles (17) de g, h, k, l, m, n, dans les expressions (9), on aura définitivement, pour les équations de l'ensemble des lignes de courbure de la surface proposée (3),

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{cases}$$

La solution du problème des lignes de courbure étant ainsi obtenue sous la forme (2), on pourra la mettre sous la forme des équations (1), en écrivant tout d'abord ces trois dernières équations de la façon suivante, eu égard à la seconde expression (18) de G,

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{b^2-c^2}{-G}\,[a^4+(\lambda+\mu)a^2+\lambda\mu], \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{c^2-a^2}{-G}\,[b^4+(\lambda+\mu)b^2+\lambda\mu], \\ \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{a^2-b^2}{-G}\,[c^4+(\lambda+\mu)c^2+\lambda\mu], \end{cases}$$

puis ces dernières elles-mêmes, en les multipliant respectivement en premier lieu par $\frac{a^2}{a^2+\lambda}$, $\frac{b^2}{b^2+\lambda}$, $\frac{c^2}{c^2+\lambda}$, puis en second lieu par $\frac{a^2}{a^2+\mu}$, $\frac{b^2}{b^2+\mu}$, $\frac{c^2}{c^2+\mu}$, ce qui les transformera dans les suivantes :

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2+\lambda} &= \frac{a^2(b^2-c^2)}{-G}(a^2+\mu),\\
\frac{y^2}{b^2+\lambda} &= \frac{b^2(c^2-a^2)}{-G}(b^2+\mu),\\
\frac{z^2}{c^2+\lambda} &= \frac{c^2(a^2-b^2)}{-G}(c^2+\mu);\\
\frac{x^2}{a^2+\mu} &= \frac{a^2(b^2-c^2)}{-G}(a^2+\lambda),\\
\frac{y^2}{b^2+\mu} &= \frac{b^2(c^2-a^2)}{-G}(b^2+\lambda),\\
\frac{z^2}{c^2+\mu} &= \frac{c^2(a^2-b^2)}{-G}(c^2+\lambda):
\end{aligned}
\right.
$$

dès lors, en ajoutant membre à membre, d'une part les trois équations (20), et d'autre part les trois équations de chaque ligne du groupe (21), et tenant compte de la première expression (18) de G, on obtiendra

$$
(22)\quad \left|
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1,\\
\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} &= 1,\\
\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} &= 1.
\end{aligned}
\right.
$$

Les lignes de courbure appartenant à chacun des deux systèmes sont donc tracées sur l'ellipsoïde par deux familles de surfaces du second ordre, à centre unique, homofocales entre elles et avec la surface proposée, c'est-à-dire dont les sections principales admettent les mêmes foyers. La condition que chacune d'elles doit remplir forcément de couper en un point réel à la fois la surface proposée et toutes les surfaces de l'autre famille exige que chacune des trois surfaces (22) appartienne à une variété différente, c'est-à-dire que les deux dernières soient deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes.

II. Ce résultat important étant acquis, quelques mots suffiront maintenant pour s'élever de là à la notion du système orthogonal des surfaces du second ordre et du même coup pour poser les formules fondamentales du système des coordonnées elliptiques.

En effet, l'identité de forme que présentent les équations des deux dernières surfaces (22) invite tout naturellement à appliquer la solution qui précède à une famille d'ellipsoïdes de même forme, c'est-à-dire ayant pour équation

$$(23)\qquad \frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1.$$

Il suffira évidemment pour cela de changer a^2 en $a^2+\nu$, b^2 en $b^2+\nu$ et c^2 en $c^2+\nu$ dans la solution (19) et dans les équations (22) qui en découlent. On aura ainsi tout d'abord pour les trois premières, en chassant les dénominateurs des premiers membres,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x^2&=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2&=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2&=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.\end{aligned}\right.$$

Quant aux autres, c'est-à-dire aux deux dernières équations (22), il est clair que les deux familles de surfaces qu'elles représentent, étant complètement définies par ces seules conditions d'avoir à la fois même centre, mêmes plans principaux et mêmes foyers pour les sections principales que la surface (3), tout en appartenant chacune à une variété différente, subsisteront sans modification lorsqu'on substituera à la surface particulière (3) la famille de surfaces (28) qui la comprend, et qui a toujours même centre, mêmes plans principaux et mêmes foyers qu'elle.

Or il est bien clair que la solution que nous venons d'obtenir ainsi pour l'ellipsoïde nous fournit en même temps celle relative à l'un et l'autre des deux hyperboloïdes, car nos raisonnements ni nos calculs ne supposent en quoi que ce soit que les constantes a^2, b^2, c^2 soient toutes trois positives; il faut seulement que l'une d'entre elles le soit, afin que la surface (3) ne soit pas imaginaire. Cela posé, vu l'analogie complète de forme entre les équations des trois familles (22) et (23), il résulte de ce qui précède que l'une quelconque d'entre elles est coupée par les deux autres suivant ses lignes de courbure, car tout ce que nous venons de dire s'applique indifféremment à toutes les trois; la tangente à l'intersection de deux quelconques de ces surfaces est donc normale à la troisième, ce qui revient à dire que les trois surfaces forment un système triple orthogonal.

Pour que les trois équations de même forme (22) et (23) représentent chacune une variété différente de surfaces du second ordre, il faut évidemment que le paramètre de chacune soit renfermé entre des limites qui lui soient propres. Or, si l'on suppose, suivant l'habitude, $a^2 > b^2 > c^2$, et si l'on convient d'appeler λ, μ, ν les paramètres correspondant respectivement à la famille d'hyperboloïdes à une nappe, à celle d'hyperboloïdes à deux nappes et à celle des ellipsoïdes, on aura tout d'abord comme condition nécessaire de réalité de ces trois surfaces

$$a^2+\lambda > 0, \qquad a^2+\mu > 0, \qquad a^2+\nu > 0;$$

le classement imposé des trois surfaces entre les trois variétés que nous venons de dire exigera en outre

$$b^2+\lambda < 0, \qquad b^2+\mu > 0, \qquad b^2+\nu > 0,$$
$$c^2+\lambda < 0, \qquad c^2+\mu > 0, \qquad c^2+\nu > 0,$$

c'est-à-dire simplement, en rapprochant les conditions précédentes,

$$(25) \qquad -a^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -c^2 < \nu.$$

On reconnaît de suite qu'en supposant λ, μ, ν astreintes à ces conditions, les expressions (24) fournissent constamment pour x, y, z des valeurs réelles. D'autre part, on s'assure sans peine, par des substitutions convenables dans le premier membre, que, quelles que soient x, y, z, l'équation du troisième degré en ρ

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1$$

a toujours ses trois racines réelles et séparées par les quantités $-a^2$, $-b$, $-c^2$ et $+\infty$, en sorte que l'on peut alors convenir de les désigner par λ, μ, ν. Il suit de là qu'à un point quelconque de l'espace correspondra un système de valeurs réelles, unique et parfaitement déterminé, des variables λ, μ, ν, condition nécessaire et suffisante pour que ce système de variables, renfermées par définition entre les limites (25), puisse être employé comme un système de coordonnées, et les équations (24) seront précisément les formules de transformation qui permettront de les introduire dans les calculs à la place des coordonnées rectilignes.

Bien que nous ne parvenions ainsi, en fin de compte, qu'à des résultats fort connus, nous ne pensons pas néanmoins que les développements qui précèdent doivent être regardés comme complètement inutiles, attendu que la marche et l'esprit de la méthode qu'ils ont pour but d'indiquer peuvent être essayés à propos d'autres surfaces que les surfaces du second ordre, et qu'ils pourront peut-être conduire ainsi un analyste plus habile à la découverte de nouveaux systèmes orthogonaux.