Dolbnia

Sur l'addition des intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 204-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__204_0>

SUR L'ADDITION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE, DEUXIÈME ET TROISIÈME ESPÈCE;

PAR M. DOLBNIA.

1. Le célèbre théorème d'Abel, exposé dans le Mémoire *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* (¹), se rapporte, comme on le sait, à l'addition de toutes les fonctions transcendantes ayant des différentielles algébriques. A l'aide de ce théorème, comme nous verrons, on obtient, d'une manière très simple, les formules d'addition des arguments de première, deuxième et troisième espèce. Quoique la question qui nous occupe soit à peu près épuisée, néanmoins une façon nouvelle de la poser mérite peut-être quelque attention.

Nous nous proposons, *a priori*, de rechercher les valeurs de x pour lesquelles

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

s'exprime par une fonction rationnelle et entière de x (²). Ces valeurs se déterminent par l'équation algébrique

$$(1) \qquad \Delta x = a + bx - ex^2 + \ldots + lx^m$$

ou

$$(2) \qquad (\Delta x)^2 - (a + bx + cx^2 + \ldots + lx^m)^2 = 0,$$

dont le degré et les coefficients sont des quantités arbi-

(¹) *Œuvres complètes*, t. I, p. 518; 1881.

(²) L'idée fondamentale développée ici est indiquée dans l'ouvrage de M. Halphen (*Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 30, 58, 115; 1886).

traires. Si nous désirons que les équations (2) aient p racines arbitraires

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_p, \qquad p < m,$$

nous prendrons dans la première partie de l'équation p coefficients arbitraires.

Une si grande généralité de l'équation (2) permet de traiter la question de l'addition des arguments elliptiques de différentes manières. Pour le but proposé, il suffit que l'équation (2) ait trois racines, et par conséquent deux coefficients arbitraires. Dans l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, p. 688; 1875), on donne à l'équation fondamentale la forme suivante

$$(\Delta x)^2 - (1 + px + qx^2)^2 = 0.$$

Au moyen de cette forme, on voit de suite que, après la disparition du facteur x, il reste une équation du troisième degré, qui, par conséquent, aura trois racines. On peut disposer arbitrairement de deux de ces racines, car les coefficients p et q sont indéterminés.

Abel [1], et après lui d'autres auteurs [2], donnent à l'équation (2) la forme

$$(1 - x^2)(1 - k^2x^2) - (\alpha x + \beta x^3)^2 = f(x) = 0. \tag{3}$$

Cette équation a six racines

$$\pm x_1, \quad \pm x_2, \quad \pm x_3.$$

Si x_1, x_2, x_3 satisfont à l'équation

$$\Delta x - (\alpha x + \beta x^3) = 0,$$

---

(1) *Œuvres complètes*, t. I, p. 538; 1881.
(2) J. Bertrand, *Calcul intégral*, p. 582; 1870.

les racines $(-x_1)$, $(-x_2)$, $(-x_3)$ satisferont à l'équation

$$\Delta x + \alpha x + \beta x^3 = 0.$$

Prenant la différentielle totale de (3), nous aurons

$$f'(x)\,dx - 2\,\Delta x(x\,d\alpha + x^3\,d\beta) = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2\frac{x}{f'(x)}\,d\alpha + 2\frac{x^3}{f'(x)}\,d\beta$$

ou

$$\frac{x^2\,dx}{\Delta x} = 2\frac{x^3}{f'(x)}\,d\alpha + 2\frac{x^5}{f'(x)}\,d\beta;$$

par conséquent,

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2\,dx_i}{\Delta x_i} = 2\,d\alpha \sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'(x_i)} + 2\,d\beta \sum_1^3 \frac{x_i^5}{f'(x_i)}.$$

D'après le théorème bien connu d'Euler ([1]), nous aurons

$$\sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'(x_i)} = 0,$$

$$\sum_1^3 \frac{x_i^5}{f'(x_i)} = -\frac{1}{2\beta^2},$$

donc

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2\,dx_i}{\Delta x_i} = -\frac{d\beta}{\beta^2},$$

d'où

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1^2\,dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{x_2^2\,dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{x_3^2\,dx_3}{\Delta x_3} = \frac{1}{\beta} + \text{const.}$$

([1]) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 216, 217; 1886.

Dans cette équation, on peut disposer arbitrairement des racines x_1 et x_2. Supposons $x_1 = x_2 = 0$, il en résulte nécessairement $x_3 = 0$ (1), et comme $\frac{1}{\beta^2} = x_1^2 x_2^2 x_3^2$, si nous avons $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on obtient

$$\frac{1}{\beta} = 0;$$

donc

$$\text{const.} = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1^2\, dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{x_2^2\, dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{x_3^2\, dx_3}{\Delta x_3} = x_1 x_2 x_3.$$

Remarque. — La propriété des racines x_1, x_2, x_3, par laquelle, si $x_1 = x_2 = 0$, on a

$$x_3 = 0,$$

peut être démontrée de la manière suivante. Nous avons

$$\alpha x_1 + \beta x_1^3 - \Delta x_1 = 0,$$
$$\alpha x_2 + \beta x_2^3 - \Delta x_2 = 0,$$
$$\alpha x_3 + \beta x_3^3 - \Delta x_3 = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^3 & \Delta x_1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^3 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant $x_1 = 0$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^2 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_2^3 \\ x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2^2 \\ 1 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x_3^2 = x_2^2.$$

---

(1) BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 581; 1870.

Si donc $x_2 = 0$, nous aurons

$$x_3 = 0.$$

2. De l'équation

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2\frac{x}{f'(x)}d\alpha + 2\frac{x^3}{f'(x)}d\beta,$$

on déduit

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\Delta x_i} = 2\,d\alpha \sum_1^3 \frac{x_i}{f'(x_i)} + 2\,d\beta \sum_1^3 \frac{x^3}{f'(x)},$$

d'où

$$(5)\qquad \int_0^{x_1} \frac{dx_i}{\Delta x_i} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{\Delta x_3} = 0.$$

Posons

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\Delta x} = u_1 \qquad \int_0^{x_2} \frac{dx}{\Delta x} = u_2, \qquad \int_0^{x_3} \frac{dx}{\Delta x} = u_3;$$

nous avons

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$
$$u_3 = -(u_1 + u_2),$$
$$x_1 = \lambda u_1, \qquad x_2 = \lambda u_2, \qquad x_3 = \lambda u_3.$$

L'équation (4) nous donnera

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} &-\lambda u_1 \lambda u_2 \lambda(u_1 + u_2) \\ &= \int_0^{u_1} \lambda^2 u_1\, du_1 + \int_0^{u_2} \lambda^2 u_2\, du_2 + \int_0^{u_3} \lambda^2 u\, du. \end{aligned} \right.$$

Supposons que u_3 soit une quantité constante, alors

$$du_1 = -du_2.$$

En différentiant (6) relativement à u_1, nous aurons

$$-\lambda(u_1 + u_2)(\mu u_1 \nu u_1 \lambda u_2 - \mu u_2 \nu u_2 \lambda u_1) = \lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2,$$

d'où

$$\lambda(u_1+u_2)=\frac{\lambda^2 u_1-\lambda^2 u_2}{\lambda u_1\,\mu u_2\,\nu u_2-\lambda u_2\,\mu u_1\,\nu u_1},$$

ou

$$(8)\qquad \lambda(u_1+u_2)=\frac{\lambda u_1\,\mu u_2\,\nu u_2+\lambda u_2\,\mu u_1\,\nu u_1}{1-k^2\lambda^2 u_1\,\lambda^2 u_2}.$$

Nous voyons avec quelle simplicité on obtient la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques proprement dites. L'addition des arguments elliptiques du n° 3, troisième espèce, est obtenue tout aussi simplement, quoique le calcul en soit plus compliqué.

Nous avons évidemment

$$\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x}=\frac{2a^2x}{(a^2-x^2)f'(x)}\,d\alpha+\frac{2a^2x^3}{(a^2-x^2)f'(x)}\,d\beta.$$

En décomposant les deux fractions

$$\frac{2a^2x}{(a^2-x^2)f'(x)},\quad \frac{2a^2x^3}{(a^2-x^2)f'(x)}$$

d'après les règles bien connues, nous aurons

$$\frac{2a^2x}{(a^2-x^2)f'(x)}=\frac{a^2}{f'(a)}\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)+\frac{\varphi(x)}{f'(x)},$$

$$\frac{2a^2x^3}{(a^2-x^2)f'(x)}=\frac{a^4}{f'(a)}\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}\right)+\frac{\xi(x)}{f'(x)};$$

ici le degré de $\varphi(x)$ est moindre que le degré de $f'(x)$, et le degré de $\xi(x)$ moindre que le degré $f'(x)$.

Par cette raison,

$$\sum_1^3\frac{dx_i}{\left(1-\frac{x_i^2}{a^2}\right)\Delta x}$$

$$=\left(\frac{a^2}{f'(a)}\,d\alpha+\frac{a^4}{f'(a)}\,d\beta\right)\sum_1^3\left(\frac{1}{a-x_i}+\frac{1}{a+x_i}\right).$$

Mais

$$\sum_1^3 \left(\frac{1}{a - x_i} + \frac{1}{a + x_i}\right) = \frac{f'(a)}{f(a)};$$

par conséquent,

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right)\Delta x_i} = \frac{a^2}{f(a)}\,d\alpha + \frac{a^4}{f(a)}\,d\beta.$$

En posant $\alpha a + \beta a^3 = \zeta$, nous avons

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{(\Delta a)^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2\,\Delta a}\left(\frac{1}{\Delta a + \zeta} - \frac{1}{\Delta a - \zeta}\right)$$

et, par suite,

$$\sum_1^3 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right)\Delta x_i} = \frac{a}{2\,\Delta a}\log\left(\frac{\Delta a + \alpha a + \beta a^3}{\Delta a - \alpha a - \beta a^3}\right)^2 + C.$$

Si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on obtient

$$\beta = \infty, \qquad \alpha = \infty, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \infty,$$

par conséquent $C = 0$; donc

$$\sum_1 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right)\Delta x_i} = \frac{a}{2\,\Delta a}\log\left(\frac{\alpha a + \beta a^3 + \Delta a}{\alpha a + \beta a^3 - \Delta a}\right)^2.$$

4. L'équation d'Abel

$$(1) \qquad 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2 x^4 - (\alpha x + \beta x^3)^2 = 0$$

se transforme en celle-ci

$$\frac{1}{x^6} - (1 - k^2)\frac{1}{x^4} - \frac{k^2}{x^2} - \left(\frac{\alpha}{x^2} + \beta\right)^2 = 0.$$

En remarquant que $\frac{1}{x^2}$ est la fonction linéaire et entière de la fonction pu (Weierstrass), l'équation (1), relativement à la fonction pu, sera de la forme

$$(2)\qquad f(x) = 4p^3u - g_2 pu - g_3 - (a pu + b)^2 = 0,$$
$$pu = x.$$

M. Halphen emploie cette équation dans son important ouvrage, que nous avons eu déjà l'occasion de citer. Par un raisonnement très simple, on obtient

$$du = 2\frac{db}{f'(x)} + 2\frac{x}{f'(x)}da,$$
$$(3)\qquad u_1 + u_2 + u_3 = \text{une période}.$$

D'ailleurs,

$$\sum pu_1\,du_1 = 2\sum\frac{x_1\,db}{(f'x_1)} + 2\sum\frac{x_1^2\,da}{(f'x_1)}.$$

Or

$$\sum\frac{x_1}{f'(x_1)} = 0, \qquad \sum\frac{x_1^2}{f'(x_1)} = \frac{1}{4};$$

par conséquent,

$$\sum pu_1\,du_1 = \frac{da}{2},$$

$$(4)\qquad \sum\int pu_1\,du_1 = \frac{a}{2} + \text{const.} = \pm\sqrt{pu_1 + pu_2 + pu_3 + C}.$$

Posons $u_3 = \text{const.}$; alors $du_1 = -du_2$.

En différentiant (4) relativement à u_1, nous aurons

$$(5)\qquad pu_1 - pu_2 = \pm\frac{p'u_1 - p'u^2}{2\sqrt{pu_1 + pu_2 + pu_3}},$$

d'où

$$(\text{A})\qquad pu_1 + pu_2 + pu_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}\right)^2.$$

C'est la première formule fondamentale.

De l'équation (4) on déduit

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum\left[\frac{1}{u_1}+\int_0^{u}\left(\frac{1}{u_1^2}-pu_1\right)du_1\right]\\ &\quad = i\sqrt{pu_1+pu_2+pu_3+C},\end{aligned}\right.$$

où $i=\pm 1$.

Posons $u_1+u_2+u_3=0$,

$$\frac{1}{u}+\int_0^{u}\left(\frac{1}{u^2}-pu\right)du=\zeta(u);$$

nous aurons

$$\zeta(u_1)+\zeta(u_2)-\zeta(u_1+u_2)=\frac{i}{2}\,\frac{p'u_1-p'u_2}{pu_1-pu_2}-C,$$

d'où

$$\zeta(u_1)-\zeta(u_2)-\zeta(u_1-u_2)=\frac{i}{2}\,\frac{p'u_1+p'u_2}{pu_1-pu_2}+C,$$

$$2\zeta(u_1)-[\zeta(u_1+u_2)+\zeta(u_1-u_2)]=i\,\frac{p'u_1}{pu_1-pu_2}+2C.$$

Posons $u_1=\omega$ (une demi-période); alors

$$\zeta(\omega)=\eta,\qquad \zeta(\omega+u_2)+\zeta(\omega-u_2)=2\eta,\qquad p'\omega=0;$$

par conséquent,

$$C=0,$$

et

$$\zeta(u_1)+\zeta(u_2)-\zeta(u_1+u_2)=\frac{i}{2}\,\frac{p'u_1-p'u_2}{pu_1-pu_2}.$$

En posant ici $\lim(u_1)=0$, nous voyons que la partie principale du premier membre de cette équation est $\frac{1}{u}$, et celle du second $-\frac{i}{u}$; par conséquent,

$$i=-1,$$

et l'on a

$$\zeta(u_1) + \zeta(u_2) - \zeta(u_1 + u_2) = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}.$$

C'est la seconde formule fondamentale (Halphen, p. 138).

6. *Remarque.* — L'exactitude de l'équation

$$\sum_1^3 \int \frac{x_i^2\, dx_i}{\Delta x_i} = + x_1 x_2 x_3$$

peut être démontrée comme il suit.

Posons

$$\sum_1^3 \int \lambda^2 u_i\, du_i = k \lambda u_1\, \lambda u_2\, \lambda u_3,$$

où

$$k = \pm 1.$$

En différentiant relativement à u_1, on obtient

$$\lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2 = -k\lambda(u_1 + u_2)(\lambda u_2\, \mu u_1\, \nu u_1 - \lambda u_1\, \mu u_2\, \nu u_2).$$

En posant ici $u_2 = 0$, nous aurons

$$\lambda^2 u_1 = k\lambda^2 u_1,$$

d'où

$$k = +1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$