Nouvelles annales de mathématiques

Cl. Servais

Sur les cubiques nodales circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 197-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__197_1>

SUR LES CUBIQUES NODALES CIRCULAIRES;

Par M. Cl. SERVAIS,
Répétiteur à l'Université de Gand

I

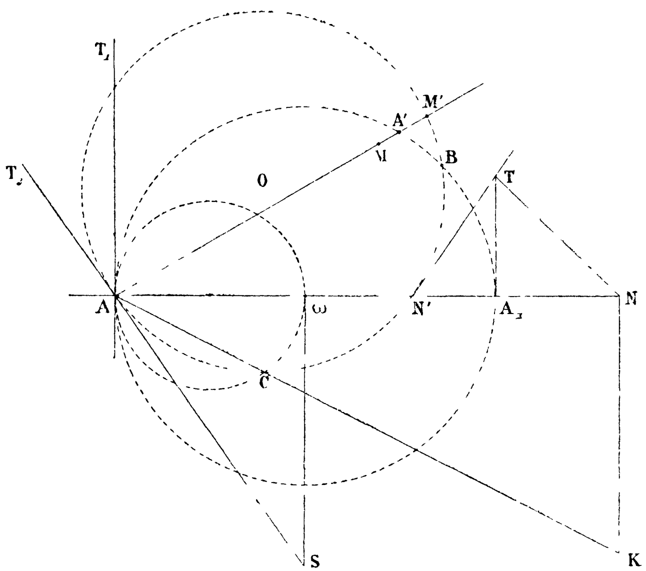
1. Considérons deux cercles ω et O se coupant aux points A et B; par le point A menons une sécante rencontrant les deux cercles respectivement aux points A′

et M′; le lieu du point M tel que

$$(AA'MM') = -1$$

est une cubique circulaire ayant le point A pour point double. En effet, elle est tangente aux deux cercles au point A, et elle passe par leurs points communs; B est donc un point de la courbe. Nous appellerons AT_1, AT_2

Fig. 1.



les tangentes aux cercles. Le cercle osculateur au point A de la cubique, correspondant à la tangente AT_1, est le cercle ($A\omega$) décrit sur $A\omega$ comme diamètre; car ce cercle correspond dans la transformation à la droite de l'infini qui ne rencontre le cercle O qu'aux points cycliques. Si C est le point de rencontre des cercles O et

(Aω), AC est parallèle à l'asymptote. On peut donc énoncer la propriété suivante :

Au point double A *d'une cubique circulaire, on décrit un cercle tangent à chacune des branches de la courbe; l'un* ω *a pour rayon le diamètre* Aω *du cercle osculateur et rencontre la cubique au point* B; *l'autre* O *passant par* B *rencontre le cercle osculateur* (Aω) *en un point* C *tel que* AC *est parallèle à l'asymptote. Une sécante issue du point double rencontre les cercles* ω *et* O *et la cubique, respectivement en des points* A′, M′, M *tels que* $(\mathrm{A\,A'\,M\,M'}) = -1$.

2. Soient A_1, N′, N les points d'intersection de la droite Aω avec les deux cercles et la cubique. On a

$$(a) \qquad \frac{2}{A_1 A} = \frac{1}{A_1 N'} - \frac{1}{A_1 N}.$$

Si les tangentes aux points A_1 et N′ aux cercles ω et O se coupent au point T, TN est la tangente à la cubique au point N. Appelons ψ l'angle TNA, φ le complément de l'angle T_1AT_2, 2ρ le diamètre Aω, N la corde normale AN; on aura

$$A_1N' = -A_1T\cot\varphi = -A_1N\frac{\operatorname{tang}\psi}{\operatorname{tang}\varphi};$$

par conséquent, l'égalité (a) devient

$$-\frac{2}{4\rho} = -\frac{1}{N-4\rho}\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\psi} - 1\right).$$

On déduit de là

$$(1) \qquad \frac{2\rho}{N} = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\psi}.$$

3. La conique transformée de la droite N′T est tangente à la cubique aux points A et N; elle a pour cercle

osculateur le cercle $(A\omega)$ et sa corde de courbure est parallèle à $N'T$. Or les deux droites AT_2 et $N'T$ sont également inclinées sur AN; donc :

La conique tangente à une cubique circulaire aux extrémités de la corde normale AN *au point double* A, *et qui a au point* A *même cercle osculateur que la cubique, a pour corde de courbure au point* A *la droite symétrique de la seconde tangente au point double par rapport à la première.*

Ceci nous montre que la formule (1) est applicable aux coniques, si φ représente l'angle de la normale et de la corde de courbure.

4. On a

$$\frac{2}{AV'} = \frac{1}{AM'} + \frac{1}{AM},$$

$$\frac{AN'}{AM'} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \chi)},$$

si χ représente l'angle MAN; donc

$$\frac{1}{2\rho\cos\chi} = \frac{1}{AN'}\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\chi)} + \frac{1}{AM};$$

mais

$$\frac{2}{4\rho} = \frac{1}{AN'} + \frac{1}{N},$$

par conséquent

$$(2) \qquad \frac{1}{AM}\,\frac{\sin(\varphi+\chi)}{\cos\varphi} = \frac{\tang\chi}{2\rho} + \frac{\tang\varphi}{N}.$$

Conséquences. — En prenant pour sécante la droite AC, on obtient

$$\frac{2\rho}{N} = \frac{\tang\chi_1}{\tang\varphi},$$

χ_1 étant l'angle de l'asymptote et de la normale AN. On peut interpréter géométriquement cette formule et arriver à la construction du cercle de courbure au point A de la cubique. Élevons aux points ω et N des perpendiculaires à la droite AN rencontrant respectivement AT_2 et AC aux points S et K; on aura

$$\omega S = A\omega \operatorname{tang}\varphi = N \operatorname{tang}\chi_1 = NK:$$

donc :

Les parallèles menées par les extrémités ω et N du diamètre du cercle osculateur et de la corde normale au point double A *à la tangente* AT_1 *et limitées respectivement à la tangente* AT_2 *et à la parallèle* AC *à l'asymptote, sont égales.*

Les sécantes AB et AO donnent les formules

$$\frac{\sin\varphi\cos\chi_2}{N} = \frac{\sin(\varphi - \chi_2)}{4\rho}$$

et

$$\frac{\cos^2\varphi}{2\rho} + \frac{\sin^2\varphi}{N} = \frac{\sin\varphi}{N_1},$$

si l'on représente l'angle BAN par χ_2 et la seconde corde normale AN_1 par N_1. Il suffit de remarquer que

$$AB = 4\rho\cos\chi_2$$

et que, pour la sécante AN_1,

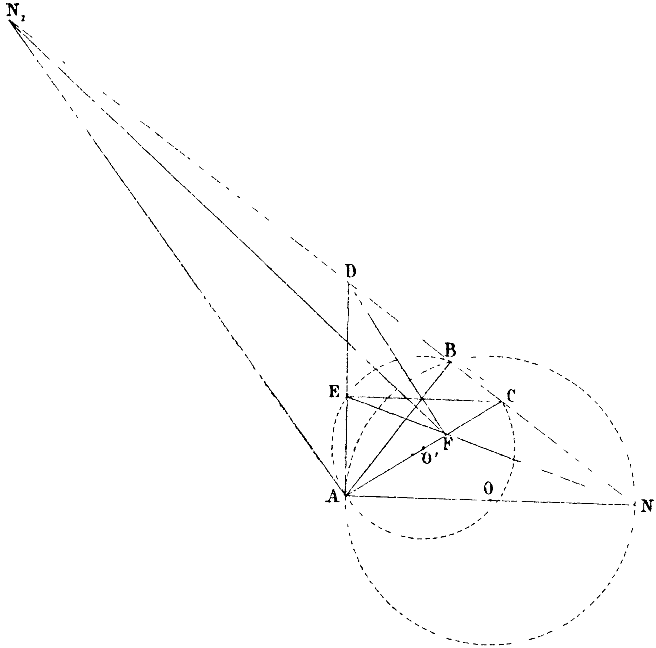
$$\chi = 90° - \varphi.$$

II.

1. Considérons deux cercles O et O′ passant par les points A et B et le diamètre AN du premier cercle; soit M′ un point quelconque de O′ : la perpendiculaire

élevée au point A sur AM′ rencontre NM′ en un point M dont le lieu est une cubique nodale circulaire. Les tangentes au point double A sont la tangente AD au cercle O

Fig. 2.



et la droite AO′; la normale AN_1 à AO′ rencontre la cubique au point N_1 correspondant à l'extrémité C du diamètre AO′; donc les quatre points N, C, B, N_1 sont en ligne droite; mais NB est parallèle à l'asymptote réelle de la cubique; par conséquent :

Dans une cubique nodale circulaire, la droite qui joint les extrémités des normales au point double est parallèle à l'asymptote.

2. Soit E le point d'intersection de AD avec le cercle O'; en cherchant le point infiniment voisin du point N sur la cubique, on voit que la tangente en ce point est la droite NE; mais EC est perpendiculaire sur AD; donc :

Les tangentes aux extrémités N *et* N_1 *des normales au point double* A *d'une cubique circulaire rencontrent les côtés opposés du triangle formé par les tangentes au point* A *et la droite* NN_1 *aux pieds des hauteurs.*

3. Si le cercle O' est tangent en A au diamètre AN, les tangentes au point double coïncident et l'on a une cubique cuspidale; donc :

La tangente à l'extrémité de la normale au point de rebroussement d'une cubique circulaire est parallèle à l'asymptote.

4. Si l'on transforme par l'inversion le théorème I de notre Note *Sur la courbure dans les coniques* (*Nouvelles Annales*, août 1888), on obtient le théorème suivant :

Par le point double d'une cubique nodale circulaire, on mène une sécante rencontrant aux points M *et* m *la cubique et la parallèle menée à l'asymptote par le milieu de la distance du point double à cette droite. La symétrique* M_1 *du point* M *par rapport au point* m *décrit un cercle, ayant son centre sur la perpendiculaire au point* A *à la droite qui joint ce point au tangentiel du point réel à l'infini de la cubique.*