NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. LEFÈVRE

Problème donné au concours général en 1874

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 158-164

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__158_1>

PROBLÈME DONNÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1874;

PAR M. L. LEFÈVRE.

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier $F(x)$ *satisfaisant aux relations*

$$F(1-x) = F(x), \tag{1}$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m} \tag{2}$$

est

$$(3)\quad \begin{cases} F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q \\ \quad \times [A_0(x^2 - x + 1)^{3n} - A_1(x^2 - x - 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2 \\ \qquad - A_2(x^2 - x + 1)^{3(n-2)}(x^2 - x)^4 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}], \end{cases}$$

p, q, n étant des nombres entiers, et $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des constantes quelconques.

1. Soit a une racine quelconque de l'équation

$$F(x) = 0;$$

la relation (2) montre que $\frac{1}{a}$ est également racine de cette équation. Posons

$$\frac{1}{a} = a';$$

la relation (1) montre alors que

$$1 - a' = 1 - \frac{1}{a}$$

sera une nouvelle racine ; puis

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a - 1},$$

en vertu de (2), et ainsi de suite. On est conduit de cette façon aux six expressions différentes

$$(4)\qquad a,\quad \frac{1}{a},\quad 1 - \frac{1}{a},\quad \frac{a}{a-1},\quad \frac{1}{1-a},\quad 1 - a.$$

On reconnaît là les six valeurs du rapport anharmonique de quatre éléments, et l'on sait (ce qui peut se vérifier aisément) qu'en prenant l'inverse ou le complément à l'unité de l'une d'elles, on en retrouve une autre.

Les racines de l'équation $F(x)=0$ se partagent donc en groupes de 6; et son degré sera multiple de 6. Il n'y a d'exception possible que si deux des valeurs (4) déduites d'une racine a sont égales; je supposerai d'abord que ceci n'ait pas lieu.

Alors $F(x)$ est de la forme

$$A_0\left[(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)\cdots(x-1+a)\right]$$
$$\times\left[(x-b)\left(x-\frac{1}{b}\right)\cdots(x-1+b)\right]\cdots$$

Cela posé, je considère le polynôme du sixième degré

$$f(x)=(x^2-x+1)^3-A(x^2-x)^2,$$

obtenu en faisant $p=0$, $q=0$, $n=1$ dans (3).

Il est facile de voir que

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^6}$$

et

$$f(1-x)=f(x),$$

ce qui prouve, comme pour $F(x)$, que les six racines de $f(x)=0$ sont de la forme (4), et par suite que

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-x+1)^3-A(x^2-x)^2\\&=(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-1+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{a}{a-1}\right)\\&\qquad\times\left(x-\frac{1}{1-a}\right)(x-1+a).\end{aligned}$$

D'ailleurs, a étant connu, on calcule la valeur de A correspondante en donnant, dans cette identité, à x une valeur particulière.

Il en résulte enfin que $F(x)$ est de la forme

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}&A_0[(x^2-x+1)^3-A(x^2-x)^2]\\&\qquad\times[(x^2-x+1)^3-B(x^2-x)^2]\cdots,\end{aligned}\right.$$

ou, en effectuant le produit,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &A_0(x^2-x+1)^{3n} \\ &\quad + A_1(x^2-x+1)^{3(n-1)}(x^2-x)^2+\ldots-A_n(x^2-x)^{2n}. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que deux des valeurs (4) relatives à une racine a de $F(x)=0$ soient égales; les autres sont aussi égales deux à deux ou trois à trois, ou à l'un des trois groupes suivants de valeurs particulières des six expressions (4) ([1]) :

(I)	1	1	0	∞	∞	0	(deux des quatre éléments coïncident).
(II)	-1	-1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	(division harmonique).
(III)	$-\alpha$	$-\alpha^2$	$-\alpha$	$-\alpha^2$	$-\alpha$	$-\alpha^2$	(division équianharmonique).

α et α^2 désignent les racines cubiques imaginaires de l'unité.

Considérons alors les polynômes

$$\begin{gathered} \varphi(x)\equiv(x-1)x\equiv x^2-x, \\ \psi(x)\equiv(x+1)(x-2)(2x-1)\equiv 2x^3-3x^2-3x+2, \\ \chi(x)\equiv(x+\alpha)(x+\alpha^2)\equiv x^2-x+1, \end{gathered}$$

qui ont pour racines les nombres (I), (II) ou (III); on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(1-x) &= \varphi(x), \\ \varphi\left(\frac{1}{x}\right) &= -\frac{\varphi(x)}{x^2}, \\ \psi(1-x) &= -\psi(x), \\ \psi\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\psi(x)}{x^3}, \\ \chi(1-x) &= \chi(x), \\ \chi\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\chi(x)}{x^2}. \end{aligned}\right.$$

([1]) Voir Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. I, p. 49 et 90 de la traduction française.

Supposons que l'équation $F(x) = 0$ admette comme racine l'une des quantités du groupe (II), par exemple; elle admet autant de fois les autres.

En effet, elle les admet au moins une fois; donc $F(x)$ est divisible par $\psi(x)$. Si alors le quotient

$$Q(x) = \frac{F(x)}{\psi(x)}$$

admet encore cette racine, les relations (1), (2) et (7) montrent qu'il admet encore les autres et qu'on peut, par conséquent, le diviser par $\psi(x)$, ...; on montre de même que $F(x)$ peut contenir en facteur une puissance de $\varphi(x)$ ou de $\chi(x)$. De plus, ces puissances sont paires pour $\varphi(x)$ et $\psi(x)$; car, si l'on change x en $\frac{1}{x}$, $\varphi(x)$ seul change de signe, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ ne changent pas. Si l'on change x en $1 - x$, $\psi(x)$ seul change de signe.

En résumé, le polynôme $F(x)$ le plus général est

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) = {} & (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ & \times [A_0(x^2 - x + 1)^{3n} \\ & + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}]. \end{aligned}\right.$$

Cette forme me paraît préférable à la forme (3) de l'énoncé, car s'il est vrai que le facteur

$$(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r}$$

rentre dans le polynôme qui le suit, pour des valeurs particulières données aux constantes $A_0, A_1, \ldots$, le facteur $(x^2 - x)^{2p}$ y rentre aussi bien, si l'on fait

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{p-1} = 0.$$

Il n'est donc pas logique de mettre en évidence l'un de ces facteurs plutôt que l'autre.

Du reste, pour montrer que le facteur

$$(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r}$$

rentre dans le polynôme suivant, exprimons que $f(x)$ s'annule pour $x = -1$ (l'une des racines du groupe II), nous obtenons ainsi

$$A = \frac{27}{4}.$$

On vérifie d'ailleurs que

$$(9) \quad (x^2 - x - 1)^3 - \frac{27}{4}(x^2 - x)^2 = \frac{1}{4}(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2.$$

On voit qu'il suffirait, dans la forme (5), de prendre r quantités A, B, ... égales à $\frac{27}{4}$.

2. *Autres formes de* F(x). — Mais cette identité va nous fournir deux autres formes de F(x). Si l'on en tire soit $(x^2 - x)^2$, soit $(x^2 - x + 1)^3$ et qu'on porte dans (8), il vient

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) \equiv {} & (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ & \times [B_0(x^2 - x + 1)^{3n} \\ & + B_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2 + \ldots] \end{aligned} \right.$$

ou

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) \equiv {} & (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ & \times [C_0(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2n} \\ & + C_1(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2(n-1)}(x^2 - x)^2 + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Cette dernière forme permet de résoudre algébriquement une équation F$(x) = 0$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) lorsque, débarrassée des racines (I), (II), (III), si elle en a, son degré ne surpasse pas 24.

Posons dans le polynôme entre crochets

$$\frac{\psi^2(x)}{\varphi^2(x)} = y,$$

on a une équation en y du quatrième degré au plus, et qu'on sait par conséquent résoudre algébriquement. Soit $y = \lambda$ l'une de ses racines, il faut alors résoudre l'équation du sixième degré

$$\psi^2(x) - \lambda\varphi^2(x) = 0.$$

Elle se décompose en deux autres

$$(12)\qquad \psi(x) - \sqrt{\lambda}\,\varphi(x) = 0,$$

$$(13)\qquad \psi(x) + \sqrt{\lambda}\,\varphi(x) = 0,$$

qui sont du troisième degré. x étant racine de l'une de ces équations, les relations (7) montrent que $\frac{1}{x}$ et $1 - x$ sont racines de l'autre.

L'équation (12) aura donc pour racines

$$a, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}$$

par exemple, et alors (13) admettra

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{a}{a-1}, \quad 1-a.$$

On sait d'une manière générale qu'il existe deux transformations homographiques qui permutent circulairement les racines d'une équation du troisième degré; ces deux transformations sont ici, pour (12) comme pour (13),

$$\theta x = 1 - \frac{1}{x}, \qquad \theta^2 x = \frac{1}{1-x}.$$