Nouvelles annales de mathématiques

J. Andrade

Sur l'invariant différentiel des figures congruentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 150-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__150_0>

SUR L'INVARIANT DIFFÉRENTIEL DES FIGURES CONGRUENTES;

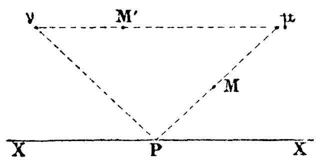
PAR M. J. ANDRADE.

Cet invariant, dont M. Poincaré a fait un si magnifique usage dans sa création des fonctions fuchsiennes, a une origine géométrique des plus simples, sur laquelle je voudrais m'arrêter un instant.

Considérons la transformation plane qui remplace un point M par un point M' et qui résulte :

1° D'une inversion positive (M, μ) autour d'un pôle P situé sur une droite XX ;

Fig. 1 (¹).



2° D'une réflexion (μ, ν) sur la même droite et en ce même pôle ;

3° D'une translation (ν, M') parallèle à la droite XX.

Une pareille transformation est représentée algébriquement par une substitution linéaire à coefficients réels, effectuée sur la variable imaginaire z représentée par le point M ; la droite XX étant prise comme axe réel.

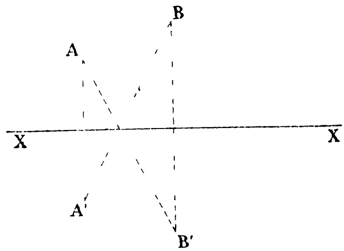
Considérons deux points A et B et leurs symétriques A' et B' par rapport à XX.

Ce groupement symétrique de quatre points sera

(¹) Les trois points ν, M', μ ne sont pas en ligne droite.

évidemment conservé par la transformation qui nous occupe ; or, si l'on désigne par a, b, a', b' les affixes de ces quatre points, la substitution homographique

Fig. 2.



représentée par cette transformation laissera inaltéré le rapport anharmonique

$$\frac{a - a'}{a - b'} \times \frac{b - b'}{b - a'}.$$

Ce rapport réel et positif se réduit à

$$\frac{\mathrm{AA'} \times \mathrm{BB'}}{\overline{\mathrm{AB'}}^2}.$$

Cet invariant ne dépend que des points A et B. Nous le désignerons par $\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}}$ ou indifféremment par $\mathrm{I}_{a,b}$.

Considérons le cercle qui passe par les quatre points A, B, A', B', qui a son centre sur l'axe XX, et qui coupe cet axe aux points K et H.

Soient k et h les affixes de ces points, et envisageons le rapport anharmonique

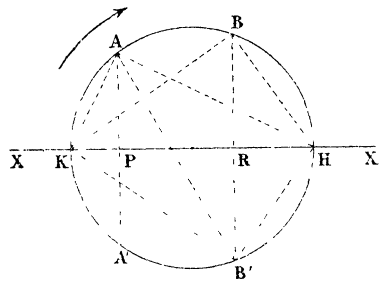
$$\mathrm{J}_{\mathrm{A,B}} = \frac{a - h}{a - k} \times \frac{b - k}{b - h}$$

réel, et même positif et > 1 quand A et B sont, comme nous le supposerons, d'un même côté de l'axe XX et que le sens du parcours du demi-cercle KABH est celui que nous considérons.

Nous aurons

$$J_{A,B} + 1 = \frac{AH.BK + AK.BH}{AK.BH} = \frac{AH.B'K + AK.B'H}{AK.BH},$$

Fig. 3.



c'est-à-dire, d'après le théorème de Ptolémée, sur le quadrilatère inscrit

$$J_{A,B} + 1 = \frac{KH.AB'}{AK.BH},$$

et comme

$$I_{A,B} = \frac{AA'.BB'}{\overline{AB'}^2},$$

on aura aussi

$$I_{A,B} \times (J_{A,B} + 1)^2 = \frac{\overline{KH}^2.AA'.BB'}{\overline{AK}^2.\overline{BH}^2} = \frac{4.\overline{KH}^2.AP.BQ}{AK.BH.AH.BK} J_{A,B},$$

ou, d'après une propriété classique du triangle rectangle,

$$I_{A,B} \times (J_{A,B} + 1)^2$$
$$= \frac{4.\overline{KH}^2.AP.BQ}{\sqrt{KP.KH}\sqrt{QH.HK}.\sqrt{PH.KH}.\sqrt{QK.KH}} J_{A,B} = 4 J_{A,B};$$

donc enfin

$$I_{A,B} = \frac{4 J_{A,B}}{[J_{A,B} + 1]^2}.$$

$J_{A,B}$ est donc aussi un invariant.

Concevons maintenant que le point B se rapproche indéfiniment de A, cet invariant devient

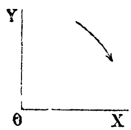
$$\mathrm{J}_{a,a+da} = \frac{a-h}{a-k}\,\frac{a-k+da}{a-h+da},$$

c'est-à-dire, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\mathrm{J}_{a,a+da} = \mathrm{I} + \frac{(h-k)}{(a-k)(h-a)}\,da;$$

la partie complémentaire à I est réelle et positive dans le cas où le point $a+da$ succède au point a en décrivant une circonférence (KH) dans le sens de la rota-

Fig. 4.



tion d'un angle droit qui amènerait l'axe imaginaire OY en coïncidence avec l'axe réel OX.

C'est ce que nous supposerons.

Nous avons donc pour la partie complémentaire cherchée l'expression réelle et positive

$$\frac{\mathrm{KH}\times \mathrm{mod}\, da}{\mathrm{AK.AH}} = \frac{\mathrm{KH}.\,\mathrm{mod}\, da}{\sqrt{\mathrm{KP.KH}}\sqrt{\mathrm{PH.KH}}} = \frac{\mathrm{mod}\, da}{\mathrm{AP}},$$

et, si $a = x + iy$,

$$\mathrm{J}_{a,a+da} = \mathrm{I} + \frac{\mathrm{mod}\, da}{y};$$

on en conclut que l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{mod}\, da}{y}$$

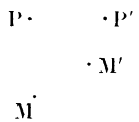
prise le long d'une ligne L ne change pas par la transformation de figure définie plus haut.

Cette intégrale joue le même rôle dans cette transformation que la longueur d'une ligne dans le déplacement d'une figure.

Nous allons voir maintenant ce que deviennent l'invariant différentiel $\frac{\operatorname{mod} da}{y}$ et l'intégrale correspondante dans la transformation par congruence. Rappelons d'abord la définition des figures congruentes.

Soit (M, M′) la transformation de figure définie plus haut.

Fig. 5.



Soit (M, P) la transformation (T) la plus générale qui résulte de la combinaison de l'inversion, de la transformation par symétrie et du déplacement d'une figure plane.

Soit (M′, P′) la même transformation (T) effectuée sur le point M′.

Le point P′ est dit le transformé de P par congruence; ou encore la figure (P) est congruente à la figure (P′).

Analytiquement, si l'on désigne par R la substitution linéaire réelle que représente la transformation (M, M′) et par S la substitution linéaire *quelconque* que représente la transformation (M, P), la transformation par congruence sera la représentation de la substitution

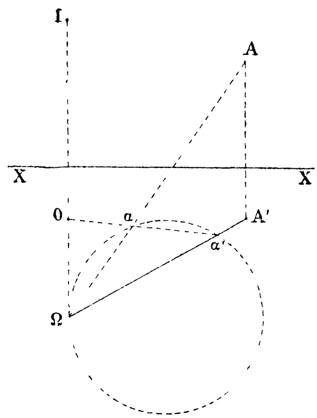
$$S^{-1}.R.S.$$

Il résulte immédiatement de la définition des figures congruentes que cette transformation de figures laisse inaltéré un certain cercle du plan, savoir le cercle qui est le transformé de l'axe XX, dans la transformation T, car cet axe XX restait lui-même inaltéré dans la transformation que nous avons d'abord étudiée. Ce cercle se nomme le cercle *fondamental*.

On peut se demander ce que deviennent deux points A et A′ symétriques par rapport à XX lorsqu'on les soumet tous deux à la transformation T.

Supposons d'abord que la transformation T se réduise à une inversion autour du pôle Ω. Par cette inversion, l'axe XX se change, comme on sait, en un cercle

Fig. 6.



passant par Ω et dont le centre O se déduit par l'inversion considérée du point I symétrique du pôle Ω par rapport à XX.

D'ailleurs les trois points I, A et A′ sont évidemment sur une circonférence qui passe par Ω; leurs transformés O, α et α′ seront donc en ligne droite.

Mais les points α et α′ sont sur le cercle Ωαα′, transformé de la droite AA′, et ce cercle doit couper orthogonalement le cercle transformé de XX; nous avons donc

$$\overline{O\Omega}^2 = O\alpha . O\alpha'.$$

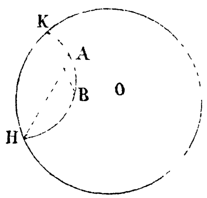
Ainsi deux points symétriques par rapport à XX se changent par la transformation T en deux points *situés l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du cercle fondamental, sur un même rayon de ce cercle, dont la longueur est moyenne proportionnelle entre les distances de ces deux points au centre.* Ce résultat n'est évidemment pas altéré, par les déplacements qui suivent l'inversion dans une transformation T.

Voyons maintenant la nouvelle forme de l'invariant $J_{a,a+da}$ dans la transformation par congruence.

L'invariant $J_{A,B}$ demeure inaltéré par la transformation T.

Considérons alors le cercle qui passe par A et B et

Fig. 7.



coupe le cercle fondamental O orthogonalement en H et K.

Nous avons encore

$$J_{A,B} = \frac{AH}{AK}\,\frac{BK}{BH}.$$

Si B devient infiniment voisin de A, et si nous désignons par φ et φ_1 les angles au centre du cercle O′, mesurés par les arcs KA et AH, nous trouvons, par un calcul très simple,

$$J_{a,a+da} = 1 - d\varphi\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}\varphi\,\sin\frac{1}{2}\varphi_1}$$

et, en désignant par l le rayon du cercle O', nous pourrons écrire l'invariant différentiel :

$$\text{mod}\, da \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{l\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi_1};$$

et, le facteur de mod da étant indépendant de la direction du déplacement da, nous choisirons ce déplacement de la façon la plus commode, c'est-à-dire normal à OA, comme la figure suivante le suppose.

Fig. 8.

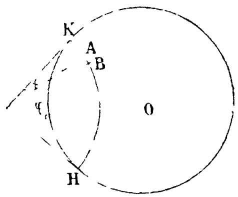
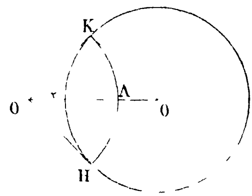


Fig. 9.



Le facteur de mod da est alors égal à

$$F = \frac{\sin\varphi}{l\sin^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Soit R le rayon OK du cercle fondamental, et ρ la distance AO.

Nous avons $l = R\cot\varphi$, d'où

$$F = \frac{\sin\varphi}{R\cot\varphi\sin^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{R\cos\varphi\sin^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{R\cos\varphi} = \frac{4}{\dfrac{R\cos\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}};$$

or, on a sur la figure

$$\frac{R}{\sin\varphi} - \frac{R\cos\varphi}{\sin\varphi} = \rho.$$

d'où

$$\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{\rho}{R},$$

d'où enfin

$$F = \frac{1}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)};$$

en faisant abstraction du facteur 4, nous avons donc pour remplacer l'invariant différentiel $\frac{\text{mod}\,da}{y}$ cet autre

$$\frac{\text{mod}\,da}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)},$$

et, par suite, aussi l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod}\,da}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)}$$

prise le long d'une ligne quelconque.