WORONTZOFF

Solution de la question 1570, proposée par M. Rouché

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 143-149

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__143_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 1370, PROPOSÉE PAR M. ROUCHÉ;

PAR M. WORONTZOFF.

Étant donnée la relation

$$\sin(x-y) = m\sin(x+y).$$

dans laquelle m désigne un nombre donné dont la valeur absolue est inférieure à 1, *développer y en série suivant les puissances croissantes de m, et indiquer la forme du reste lorsqu'on ne prend qu'un nombre limité de termes* (¹).

De l'équation donnée

$$\sin(x-y) = m\sin(x+y) = m\sin[2x-(x-y)],$$

on déduit

$$y = \operatorname{arc\,tang}\left[\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\operatorname{tang} x\right],$$

$$x-y = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right).$$

Comme

$$\begin{aligned} x-y &= x - \operatorname{arc\,tang}\left[\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\operatorname{tang} x\right] \\ &= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\{\log[1+m(\cos 2x+i\sin 2x)] - \log[1+m(\cos 2x - i\sin 2x)]\} \\ &\qquad (i=\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &D^n_m \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2i}\, 1.2.3\ldots(n-1) \\ &\quad\times\left\{\frac{(\cos 2x+i\sin 2x)^n}{[1+m(\cos 2x+i\sin 2x)]^n} - \frac{(\cos 2x-i\sin 2x)^n}{[1+m(\cos 2x-i\sin 2x)]^n}\right\} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+2m\cos 2x+m^2)^n} \\ &\quad\times\left[\sin 2nx + \frac{n}{1}m\sin 2(n-1)x\right. \\ &\qquad\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}m^2\sin 2(n-2)x + \ldots + \frac{n}{1}m^{n-1}\sin 2x\right], \end{aligned}$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 504, novembre 1887.

ou

$$\left[D_m^n \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{m\sin 2x}{1+m\cos 2x}\right)\right]_{m=0} = (-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots(n-1)\sin 2nx,$$

$$\left(D_m^n = \frac{d^n}{dm^n}\right);$$

au moyen de la série de Maclaurin, prise avec le terme complémentaire (h_n) de Cauchy, on trouve

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} y &= x - m\sin 2x \\ &\quad + m^2\frac{\sin 4x}{2} - m^3\frac{\sin 6x}{3} + \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} m^{n-1}\frac{\sin 2(n-1)x}{n-1} + R_n \quad (^1), \end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{aligned} R_n = {} & \frac{(-1)^n m^n (1-\theta)^{n-1}}{(1-2\theta m\cos 2x+\theta^2 m^2)^n} \\ & \times\left[\sin 2nx + n\theta m\sin 2(n-1)x\right. \\ & \left. + \frac{n(n-1)}{1.2}(\theta m)^2\sin 2(n-2)x + \ldots + n(\theta m)^{n-1}\sin 2x\right]. \end{aligned}$$

---

(1) En posant $e^{ai} = p$ et $e^{-ai} = q$, on a généralement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[f(pm)+f(qm)] \\ & = \Phi(m) = f(0) + m\cos a f'(0) \\ & \qquad + \frac{m^2}{1.2}\cos 2a f''(0) + \ldots + \frac{m^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\cos(n-1)a f^{n-1}(0) \\ & \qquad + \frac{m^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{2}\left[p^n D_y^n f(y)_{y=p\theta m} + q^n D_y^n f(y)_{y=q\theta m}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i}[f(pm)-f(qm)] \\ & = \Phi_1(m) = m\sin a f'(0) \\ & \qquad + \frac{m^2}{1.2}\sin 2a f''(0) + \ldots + \frac{m^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\sin(n-1)a f^{n-1}(0) \\ & \qquad + \frac{m^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{2i}\left[p^n D_y^n f(y)_{y=p\theta m} - q^n D_y^n f(y)_{y=q\theta m}\right]. \end{aligned}$$

Cette série peut être obtenue aussi à l'aide des formules

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &F\{\Phi[f_\nu(m)]\}\\ &\quad = F[\Phi(y)]\\ &\quad = F(x)\\ &\quad = F[\Phi(z)]\\ &\qquad + \left\{\sum_{n=1}^{k=n-1}\frac{m^k}{1.2.3\ldots k}\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(k)}F[\Phi(z)]\right\}_{z=r=f_\nu(0)} + h'_n: \end{aligned}\right.$$

où

$$x = \Phi(y),\qquad f(y) = m,\qquad f(r) = 0,$$

$$\begin{aligned} R'_n &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots n}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(n)}F[\Phi(z)]\right\}_{\substack{z=r+\theta_2(y-z)\\ y=f_\nu(m)}}\\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)}[1-\theta_1]^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(n)}F[\Phi(z)]\right\}_{z=f_\nu\theta_1(m)}\\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\left[1-\frac{f(z)}{f(y)}\right]^{n-1}\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(n)}F[\Phi(z)]\right\}_{z=r+\theta(y-z)}; \end{aligned}$$

et, pour $x = \Phi(y) = y$,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &F[f_\nu(m)]\\ &\quad = F(y)\\ &\quad = F(r)\\ &\qquad + \left\{\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{m^k}{1.2.3\ldots k}\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(k)}F(z)\right\}_{z=r=f_\nu(0)} + R_n \text{ (1)}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots n}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(n)}F(z)\right\}_{\substack{z=z+\theta_2(y-z)\\ y=f_\nu(m)}}\\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta_1)^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(n)}F(z)\right\}_{z=f_\nu\theta_1(m)}\\ &= \frac{m^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\left[1-\frac{f(z)}{f(y)}\right]^{n-1}\left[\frac{1}{f'(z)}D_z\right]^{(n)}F(z)\right\}_{z=r+\theta(x-z)}, \end{aligned}$$

$$\{\theta_1(m) = \theta_1 f(y) = f[z+\theta(y-z)],\ 0<\theta<1,\ 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1\},$$

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 362; août 1888.

En prenant

$$f(y)=\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=m, \qquad F(y)=y,$$

on a

$$f(x)=0, \qquad r=f_v(0)=x,$$

$$f'(y)=-\frac{\sin 2x}{\sin^2(x+y)},$$

$$\frac{1}{f'(y)}=-\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2x},$$

$$\frac{1}{f'(y)}D_y y=-\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2x},$$

$$\left[\frac{1}{f'(y)}D_y\right]^{(2)} y=\left[\frac{1}{f'(y)}D_y\right]\left[\frac{1}{f'(y)}D_y\right]y$$

$$=\frac{\sin^2(x+y)\sin 2(x+y)}{\sin^2 2x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left[\frac{1}{f'(y)}D_y\right]^{(n)} y=(-1)^n.1.2.3\ldots(n-1)\,\frac{\sin^n(x+y)\sin n(x+y)}{\sin^n 2x},$$

$$\left\{\left[\frac{1}{f'(y)}D_y\right]^{(n)} y\right\}_{y=r=x}=(-1)^n.1.2.3\ldots(n-1)\sin 2nx;$$

$$1-\frac{f[x+\theta(y-x)]}{f(y)}$$

$$=\frac{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)-\sin\theta(y-x)\sin[2x+(y-x)]}{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)}$$

$$=\frac{\sin 2x[\sin(y-x)\cos\theta(y-x)-\cos(y-x)\sin\theta(y-x)]}{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)}$$

$$=\frac{\sin 2x\sin[(1-\theta)(y-x)]}{\sin[2x+\theta(y-x)]\sin(y-x)}.$$

Par conséquent, d'après la formule (3),

$$y=x+\sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^k m^k\,\frac{\sin 2kx}{k}+h_n$$

$$=f_v(m)=\text{arc tang}\left[\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\tan x\right],$$

où

$$h_n = (-1)^n m^n \frac{\sin^n[2x + \theta_2(y - x)] \sin n[2x + \theta_2(y - x)]}{n \sin^n 2x}$$

$$= (-1)^n m^n \frac{\sin^n[x + f_v(\theta_3 m)]}{n \sin^n 2x} \sin n[x + f_v(\theta_3 m)]$$

$$= (-1)^n m^n (1 - \theta_1)^{n-1} \frac{\sin^n[x + f_v(\theta_1 m)] \sin n[x + f_v(\theta_1 m)]}{\sin^n 2x}$$

$$= (-1)^n m^n \left\{ \frac{\sin[2x + \theta(y - x)] \sin(y - x) - \sin \theta(y - x) \sin(y + x)}{\sin 2x \sin(y - x)} \right\}^{n-1}$$

$$\times \frac{\sin[2x + \theta(y - x)]}{\sin 2x} \sin n[2x + \theta(y - x)]$$

$$= (-1)^n m^n \left\{ \frac{\sin[(1 - \theta)(y - x)]}{\sin(y - x)} \right\}^{n-1}$$

$$\times \frac{\sin[2x + \theta(y - x)]}{\sin 2x} \sin n[2x + \theta(y - x)].$$

Note de M. Rouché.

En même temps que M. Worontzof, MM. Darmanine et Audibert nous ont envoyé des solutions de la question 1370. La solution de M. Darmanine ne diffère pas au fond de celle de M. Worontzof, et celle de M. Audibert est une application du théorème de Maclaurin.

Quand nous avons proposé ce problème, nous avions en vue la solution suivante, qui est à la fois simple et directe :

La relation

$$\sin(x - y) = m \sin(x + y)$$

peut s'écrire

$$x - y = \text{arc tang} \frac{m \sin 2x}{1 + m \cos 2x}.$$

Posons

$$\varphi(u) = \text{arc tang} \frac{u \sin 2x}{1 - u \cos 2x};$$

nous aurons

$$\varphi'(u) = \frac{\sin 2x}{1 + 2u \cos 2x + u^2}$$

ou, en effectuant la division,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi'(u) &= \sin 2x - u \sin 4x + u^2 \sin 6x - \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-2} u^{n-2} \sin 2(n-1)x \\ &\quad + (-1)^{n-1} u^{n-1} \frac{\sin 2nx + u \sin 2(n-1)x}{1 - 2u \cos 2x + u^2}. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on désigne par R le nombre défini par la relation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m) &= \frac{m}{1} \sin 2x - \frac{m^2}{2} \sin 4x + \frac{m^3}{3} \sin 6x - \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{m^{n-1}}{n-1} \sin 2(n-1)x + \mathrm{R}\frac{m^n}{n}, \end{aligned}\right.$$

on voit que la fonction

$$\begin{aligned} \varphi(u) &- \frac{u}{1} \sin 2x + \frac{u^2}{2} \sin 4x - \frac{u^3}{3} \sin 6x - \ldots \\ &- (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n-1} \sin 2(n-1)x - \mathrm{R}\frac{u^n}{n} \end{aligned}$$

s'annule pour $u = m$ aussi bien que pour $u = 0$. Sa dérivée

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &- \sin 2x - u \sin 4x - u^2 \sin 6x - \ldots \\ &- (-1)^{n-1} u^{n-2} \sin 2(n-1)x - \mathrm{R} u^{n-1}, \end{aligned}$$

qui, en vertu de (1), se réduit à

$$u^{n-1}\left[(-1)^{n-1} \frac{\sin 2nx + u \sin 2(n-1)x}{1 + 2u \cos 2x + u^2} - \mathrm{R}\right],$$

doit donc s'annuler pour une valeur de u comprise entre o et m, c'est-à-dire pour $u = \theta m$, θ étant un nombre convenablement choisi entre o et 1. On a donc

$$\mathrm{R} = (-1)^{n-1} \frac{\sin 2nx - \theta m \sin 2(n-1)x}{1 - 2\theta m \cos 2x + \theta^2 m^2}$$

et, par suite, en portant dans (2),

$$\begin{aligned} y = x &- \frac{m}{1} \sin 2x + \frac{m^2}{2} \sin 4x - \frac{m^3}{3} \sin 6x - \ldots \\ &- (-1)^{n-1} \frac{m^{n-1}}{n-1} \sin 2(n-1)x \\ &- (-1)^n \frac{m^n}{n} \frac{\sin 2nx + \theta m \sin 2(n-1)x}{1 - 2\theta m \cos 2x + \theta^2 m^2}. \end{aligned}$$