Nouvelles annales de mathématiques

A. de Saint-Germain

Lieu des points d'un solide qui partagent avec le centre de gravité l'une de ses propriétés dynamiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 138-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__138_0>

LIEU DES POINTS D'UN SOLIDE QUI PARTAGENT AVEC LE CENTRE DE GRAVITÉ L'UNE DE SES PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Soit S un solide de masse M, animé d'un mouvement connu. M. Gilbert a déterminé (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 novembre 1885) le lieu des points A du solide tels qu'à un instant donné la force vive de S soit égale à la somme de la force vive d'une masse M concentrée au point A et de la force vive du solide dans son mouvement relatif à des axes menés par A dans des directions fixes : le lieu est un cylindre de révolution; l'axe de Mozzi et la parallèle menée par le centre de gravité G en sont deux génératrices diamétralement opposées. On peut se demander quels sont les points B du solide qui partagent *momentanément* avec le point G une autre de ses propriétés dynamiques, savoir qu'à un instant donné le moment de la quantité de mouvement de S par rapport à un axe HH′ soit égal au moment, par rapport au même axe, de la quantité de mouvement d'une masse M concentrée au point B, augmenté du moment de la quantité de mouvement du solide par rapport à un axe BB′ parallèle à HH′, quand on considère le mouvement de S relativement à des axes menés par B dans des directions fixes. Dans une Note, dont le résumé a été donné dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 17 décembre 1888, j'ai dit que le lieu des points B est un hyperboloïde : un calcul simple et direct permet de s'en assurer.

Par un point O qui, à l'instant donné, coïncide avec G, menons trois axes rectangulaires fixes dont l'un, OZ, soit parallèle à HH', et soient

$x = \lambda$, $y = \mu$ les équations de HH';
x, y, z les coordonnées d'un élément m;
α, β, γ celles de l'un des points B;
v_x, v_y, v_z; φ_x, φ_y, φ_z les composantes de la vitesse : 1° de l'élément m; 2° du point considéré B.

On doit avoir

$$\begin{aligned}\Sigma m[(x-\lambda)v_y - (y-\mu)v_x] \\ = [(\alpha-\lambda)\varphi_y - (\beta-\mu)\varphi_x]\Sigma m \\ + \Sigma m[(x-\alpha)(v_y-\varphi_y) - (y-\beta)(v_x-\varphi_x)],\end{aligned}$$

ou, en faisant de simples réductions,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\Sigma m(\mu v_x - \lambda v_y) \\ &\quad = \Sigma m[\beta v_x - \alpha v_y + (2\alpha - x - \lambda)\varphi_y - (2\beta - y - \mu)\varphi_x].\end{aligned}\right.$$

A l'instant donné, le mouvement de S résulte d'une translation dont la vitesse V est celle du point G, et d'une rotation ω autour d'un axe instantané GG' qu'on peut supposer dans le plan des xz; soient a, b, c les composantes de V suivant les axes; celles de ω seront de la forme p, o, r, et l'on aura

$$\begin{aligned}v_x &= a - ry, & v_y &= b + rx - pz, & v_z &= c + py, \\ \varphi_x &= a - r\beta, & \varphi_y &= b + r\alpha - p\gamma, & \varphi_z &= c + p\beta.\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1), et observons que Σmx, Σmy, Σmz sont nuls parce que le centre de gravité est à l'origine : on peut diviser par Σm ou M, et l'on trouve que les coordonnées du point B doivent satisfaire à l'équation

$$2r(\alpha^2+\beta^2)-2p\alpha\gamma+(b-\lambda r)\alpha-(a+\mu r)\beta+\lambda p\gamma=0:$$

le lieu du point B est donc un hyperboloïde qui, naturellement, dépend de plus de paramètres que le cylindre de M. Gilbert. Le cône des directions asymptotiques ne dépend toutefois que des directions de HH′ et de l'axe de Mozzi : ce sont les directions de deux génératrices du cône situées dans un de ses plans principaux, et les plans cycliques du cône, comme ceux de l'hyperboloïde, leur sont perpendiculaires. On trouve que les génératrices de l'hyperboloïde, parallèles à OZ, sont réelles ou imaginaires et, par conséquent, que l'hyperboloïde est à une ou deux nappes, suivant qu'on a

$$(a+\mu r)^2-4b\lambda r \gtrless 0,$$

c'est-à-dire suivant que la droite HH′ est extérieure ou intérieure à un certain cylindre parabolique dont les génératrices lui sont parallèles.