E. CESARO

Sur la transformation orthotangentielle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 116-119

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__116_0>

SUR LA TRANSFORMATION ORTHOTANGENTIELLE;

PAR M. E. CESARO.

Une récente Note (¹) de M. de Longchamps vient d'appeler l'attention sur la *transformation orthotangentielle*, étudiée en 1885 par M. d'Ocagne (²) et par d'autres (³). Je vais signaler, au moyen des méthodes intrinsèques, une transformation plus générale. Soit (M′) la ligne enveloppée par les tangentes à (M), après qu'elles ont tourné du même angle α autour de leurs points de rencontre avec (M_0). Soit θ l'inclinaison de MM_0 sur la tangente à (M_0), en M_0. L'équation de MM_0 est

$$x \sin\theta = y \cos\theta.$$

Sa dérivation par rapport à s_0, faite en supposant

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds_0} = \frac{y - \rho_0}{\rho_0}, \qquad \frac{dy}{ds_0} = -\frac{x}{\rho_0},$$

donne

$$(x \cos\theta + y \sin\theta)\left(\frac{d\theta}{ds_0} + \frac{1}{\rho_0}\right) = \sin\theta,$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{1}{h} = \frac{d\theta}{ds_0} + \frac{1}{\rho_0},$$

en désignant par h la longueur du segment déterminé par la normale à (M) sur la normale à (M_0), à partir

(¹) *Bulletin de la Société des Sciences de Bohême* (8 juin, 1888).

(²) *Coordonnees parallèles et axiales* (Paris, Gauthier-Villars, 1885, Note III).

(³) *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1885, p. 259, § IV).

de (M_0). On voit que h n'est pas altéré par le changement de θ en $\theta + \alpha$, et l'on en déduit que le lieu instantané des points M', correspondant à M, est la circonférence décrite sur h comme diamètre. En particulier, le point M' de la transformée orthotangentielle est diamétralement opposé à M sur cette circonférence. En d'autres termes, les projections de M et M' sur la tangente à (M_0), en M_0, sont équidistantes de M_0. De même, l'équation de la normale à (M), en M, est

$$x \cos\theta + y \sin\theta = h \sin\theta,$$

et la dérivation donne, en tenant compte des formules (1) et (2),

$$- x \sin\theta + y \cos\theta = h \frac{dh}{ds_0} \sin\theta + \left(2h - \frac{h^2}{\rho_0}\right) \cos\theta.$$

La droite représentée par cette équation doit détacher de la normale à (M_0) un segment $\frac{\rho}{\cos\theta}$. Donc

$$(3) \qquad \rho = h \frac{dh}{ds_0} \sin\theta + \left(2h - \frac{h^2}{\rho_0}\right) \cos\theta.$$

Il en résulte que les centres de courbure sont situés sur une circonférence, et que le centre correspondant à la transformée orthotangentielle de (M) est diamétralement opposé, sur cette circonférence, au centre de courbure de (M). Il est facile de se convaincre que ce théorème subsiste pour les centres de courbure de toutes les développées successives des lignes (M) et (M').

Si l'on observe que l'angle de contingence de (M) est $d\theta + \frac{ds_0}{\rho_0}$, on a

$$\frac{ds}{\rho} = \left(\frac{d\theta}{ds_0} + \frac{1}{\rho_0}\right) ds_0 = \frac{ds_0}{h},$$

d'où, en vertu de (3),

$$(4) \qquad s = \int \left[\frac{dh}{ds_0} \sin\theta + \left(2 - \frac{h}{\rho_0}\right) \cos\theta \right] ds_0.$$

Si l'on connaît l'*équation intrinsèque* de (M_0) et l'*équation axiale* de (M), c'est-à-dire les relations existant entre ρ_0, s_0, θ, les équations (3) et (4) font connaître ρ et s en fonction de θ, et l'on en déduit, par élimination de θ, l'équation intrinsèque de (M). L'équation intrinsèque de la transformée orthotangentielle (M') s'obtient en éliminant θ entre les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho' = h \dfrac{dh}{ds_0} \cos\theta - \left(2h - \dfrac{h^2}{\rho_0}\right) \sin\theta, \\ s' = \displaystyle\int \left[\frac{dh}{ds_0} \cos\theta - \left(2 - \frac{h}{\rho_0}\right) \sin\theta \right] ds_0. \end{cases}$$

Enfin, pour avoir la transformée (M''), relative à une valeur quelconque de l'angle α, il suffit de changer θ en $\theta + \alpha$ dans les équations (3) et (4), ce qui donne, en tenant compte de (5),

$$(6) \qquad \rho'' = \rho \cos\alpha - \rho' \sin\alpha, \qquad s'' = s \cos\alpha - s' \sin\alpha.$$

Soit, par exemple,

$$\rho_0 = R, \qquad \theta = n \frac{s_0}{R}.$$

On a $h = \dfrac{R}{n-1}$, et les formules (3), (4), (5), (6) conduisent toutes à l'équation

$$(n-1)^2 \rho^2 - n^2 s^2 = \left(\frac{2n-1}{n+1} R \right)^2.$$

Dans ce cas, toutes les lignes (M') sont égales à l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle de diamètre h, roulant sans glisser sur un cercle $2n$ fois plus grand.

On peut dire que (M_0) est la *podaire* de chaque ligne (M) par rapport à sa transformée orthotangentielle. Inversement, cette transformée est l'*antipodaire* de (M_0) par rapport à (M). Il suffit de supposer que (M) se réduit à un point pour retrouver les résultats connus de la *théorie des podaires* proprement dites. On obtient la *théorie des développoïdes* en supposant θ constant, ce qui entraîne $h = \rho_0$. Enfin, pour rentrer dans la théorie des *transformations axiales* proprement dites, il faut supposer que (M_0) soit une droite. Pour ρ_0 infini et $s_0 = \lambda$, les formules (3), (4), (5) deviennent

$$\rho = \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\sin\theta - 2\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta, \qquad s = \int \rho\, d\theta,$$

$$\rho' = \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta, \qquad s' = \int \rho'\, d\theta.$$

Connaissant l'équation axiale d'une ligne, ces formules donnent, par élimination de θ, l'équation intrinsèque de la même ligne et celle de sa transformée orthotangentielle. Signalons, pour finir, la formule qui donne le rayon de courbure de la $n^{\text{ième}}$ développée d'une ligne quelconque, dont on connaît l'équation axiale. On a

$$\rho_n = u_n \sin\theta + v_n \cos\theta,$$

où

$$\left\{\begin{aligned} u_n &= \frac{d^{n+2}\lambda}{d\theta^{n+2}} - (C_{n+2,2} - 1)\frac{d^n\lambda}{d\theta^n} \\ &\quad + (C_{n+2,4} - C_{n,2})\frac{d^{n-2}\lambda}{d\theta^{n-2}} - \ldots, \\ v_n &= C_{n+2,1}\frac{d^{n+1}\lambda}{d\theta^{n+1}} - (C_{n+2,3} - C_{n,1})\frac{d^{n-1}\lambda}{d\theta^{n-1}} \\ &\quad - (C_{n+2,5} - C_{n,3})\frac{d^{n-3}\lambda}{d\theta^{n-3}} - \ldots. \end{aligned}\right.$$