A. GUTZMER

Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 101-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__101_0>

SUR CERTAINES MOYENNES ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE;

PAR M. A. GUTZMER.

Extrait d'une Lettre adressée à M. F. Gomes Teixeira (¹).

... Vous connaissez le théorème de M. Rouché (²) sur la moyenne arithmétique d'une fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{ou} \quad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu,$$

selon lequel la moyenne arithmétique de toutes les valeurs de $\frac{f(x)}{x^n}$, correspondant à une valeur déterminée du module r de la variable

$$x = r\, e^{\theta i} = r(\cos\theta + i \sin\theta),$$

est égale au coefficient a_n, ce qui s'écrit

$$\mathrm{M}_r \frac{f(x)}{x^n} = a_n.$$

Ce théorème, cité par plusieurs auteurs et d'une cer-

(¹) *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.*

(²) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXᵉ Cahier. — *Voir* aussi SERRET, *Algèbre supérieure.*

taine importance dans la théorie des fonctions, a été étendu par M. Thomae (¹).

Je vais vous communiquer dans ces lignes un théorème analogue qui se rapporte aux valeurs du carré du module de la fonction $f(x)$ le long d'un cercle autour de l'origine, et qui sera publié prochainement dans les *Mathematische Annalen.*

Supposons que la série de puissance

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

converge absolument dans la région définie par $|x| \leqq R$ (en désignant, d'après M. Weierstrass, par $|x|$ le module de la quantité x), et posons

$$x = r e^{\theta i} \qquad (r < R);$$

l'équation (1) deviendra

$$f(x) = f(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{\nu\theta i}$$

et, en multipliant par la quantité conjuguée

$$\bar{f}(r, \theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{a}_\mu r^\mu e^{-\mu\theta i},$$

nous obtiendrons

$$|f(r, \theta)|^2 = \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} a_\nu \bar{a}_\mu r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} a_\nu \bar{a}_\mu r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}.$$

(¹) *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, p. 130.

En posant $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, cette équation devient

$$\begin{aligned}
|f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} & \\
+ 2 \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} & [(\alpha_\nu \alpha_\mu + \beta_\nu \beta_\mu) \cos(\nu - \mu)\theta \\
& + (\alpha_\nu \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_\nu) \sin(\nu - \mu)\theta] \, r^{\nu+\mu} \\
= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} & \\
+ 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} & [(\alpha_{\mu+\lambda} \alpha_\mu + \beta_{\mu+\lambda} \beta_\mu) \cos\lambda\theta \\
& + (\alpha^{\mu+\lambda} \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_{\mu+\lambda}) \sin\lambda\theta] \, r^{2\mu+\lambda}.
\end{aligned}$$

En posant

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned}
& \sum_{\mu=0}^{\infty} (\alpha_{\mu+\lambda} \alpha_\mu + \beta_{\mu+\lambda} \beta_\mu) r^{2\mu+\lambda} = A_\lambda, \\
& \sum_{\mu=0}^{\infty} (\alpha_{\mu+\lambda} \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_{\mu+\lambda}) r^{2\mu+\lambda} = B_\lambda,
\end{aligned} \right.$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(3) \qquad |f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta).$$

Cette équation nous donne immédiatement

$$|f(r,\theta+\pi)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda (A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta)$$

et, par suite, nous aurons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [|f(r,\theta)|^2 + |f(r,\theta+\pi)|^2] \\
& \quad = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} (A_{2\lambda} \cos 2\lambda\theta + B_{2\lambda} \sin 2\lambda\theta).
\end{aligned}$$

De même vous trouverez

$$\frac{1}{2}\left[\left|f\left(r,\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right|^2+\left|f\left(r,\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\right]$$
$$=\sum_\nu |a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda(A_{2\lambda}\cos 2\lambda\theta+B_{2\lambda}\sin 2\lambda\theta),$$

et, en additionnant ces deux équations, vous aurez

$$\frac{1}{4}\left[|f(r,\theta)|^2-\left|f\left(r,\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right|^2\right.$$
$$\left.-|f(r,\theta-\pi)|^2-\left|f\left(r,\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\right]$$
$$=\sum_\nu |a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(A_{4\lambda}\cos 4\lambda\theta+B_{4\lambda}\sin 4\lambda\theta).$$

En continuant de cette manière, vous finirez par trouver l'équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2^n}\sum_{\lambda=0}^{2^n-1}\left|f\left(r,\theta-\frac{\lambda\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2\\&=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}[A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta)+B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)].\end{aligned}\right.$$

Maintenant il est facile de se convaincre que la dernière somme s'approche de la valeur zéro, si n augmente indéfiniment. En effet, en profitant des définitions (2) et de la supposition faite dans la série (1), il s'ensuit

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}[A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta)+B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)]$$
$$<\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}r^{2\mu+2^n\lambda}$$
$$\times(|\alpha_{\mu+2^n\lambda}\,\alpha_\mu|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}\,\beta_\mu|+|\alpha_{\mu+2^n\lambda}\,\beta_\mu|+|\alpha_\mu\,\beta_{\mu+2^n\lambda}|)$$
$$<\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{2\mu+2^n\lambda}(|\alpha_\mu|+|\beta_\mu|)(|\alpha_{\mu+2^n\lambda}|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}|)$$
$$<\sum_{\mu=0}^{\infty}r^\mu(|\alpha_\mu|+|\beta_\mu|)\sum_{\lambda=1}^{\infty}r^{\mu+2^n\lambda}(|\alpha_{\mu+2^n\lambda}|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}|).$$

La première somme est évidemment une quantité finie, tandis que la seconde en représente une sorte de reste; par conséquent, elle devra s'évanouir pour n infini, et de même le produit des deux séries.

Nous pouvons donc conclure que

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{k\pi}{2^{n-1}}\right) \right|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Or, le premier membre de (5) représente la moyenne arithmétique des carrés des modules de (1) pour tous les points du cercle $|x| = r$.

En indiquant cette moyenne par M_r, nous avons

$$(6) \qquad M_r |f(x)|^2 = M_r \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \right|^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Cette équation nous fournit le théorème suivant :

La moyenne arithmétique des carrés des modules de toutes les valeurs que la série

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

puisse avoir le long du cercle $|x| = r$, *situé dans la région de convergence, est égale à la somme des carrés des modules des termes de la série.*

Il est aisé de voir que ce théorème subsiste encore pour des séries plus générales d'une seule ou de plusieurs variables. De même on peut énoncer ce théorème pour un cercle quelconque, situé dans la région de convergence de la série, pourvu qu'on prenne, au lieu de la série proposée, son développement autour du centre du cercle. Mais je n'y insisterai plus.

Dans ses recherches sur les séries trigonométriques [1], A. Harnack a trouvé quelques formules intégrales, qui ne sont autre chose que des théorèmes sur la moyenne d'une fonction, et il est facile de déduire d'une de ces formules une autre démonstration de notre théorème, laquelle je dois à une lettre dont M. W. Dyck m'a honoré; il s'ensuit que ce théorème a plus de généralité qu'on ne croirait d'après la démonstration donnée ci-dessus. Cependant A. Harnack n'a pas tiré des conséquences de sa formule pour les fonctions d'une variable complexe. Mais cette formule [2] m'a inspiré une nouvelle démonstration du théorème énoncé, que je me permets de vous communiquer.

En effet, en partant de l'équation (3), nous aurons par intégration

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}\,d\theta \\ &\quad + 2\int_0^{2\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta)\,d\theta \\ &= 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} \\ &\quad + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(A_\lambda \int_0^{2\pi} \cos\lambda\theta\,d\theta + B_\lambda \int_0^{2\pi} \sin\lambda\theta\,d\theta\right) \\ &= 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} \\ &\quad + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[A_\lambda \left(\frac{\sin\lambda\theta}{\lambda}\right)_0^{2\pi} + B_\lambda \left(\frac{-\cos\lambda\theta}{\lambda}\right)_0^{2\pi}\right].\end{aligned}$$

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. XVII et XIX.

(2) *Loc. cit.*, t. XVII, p. 127, éq. (III).

Évidemment chaque terme de la dernière somme, et par suite la somme elle-même, s'évanouit, de sorte que nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r,\theta)|^2\,d\theta=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Voilà le théorème sous forme intégrale. Vous voyez, monsieur, qu'il suffit de supposer que l'intégrale au premier membre a un sens, ce qui est conforme aux conditions de A. Harnack pour les séries trigonométriques.

Considérons encore quelques exemples. D'après la formule (6), nous aurons pour la fonction e^x

$$\mathrm{M}_r|e^x|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(n!)^2},$$

ce qui devient, pour le cercle $|x|=1$,

$$\mathrm{M}_1|e^x|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}.$$

De même nous aurons pour la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ la relation

$$\mathrm{M}_r\left|\sum\frac{x^n}{n^2}\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n^4};$$

par conséquent, la moyenne arithmétique du carré du module de cette série, pour tous les points du cercle $|x|=1$, est égale à

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}.$$

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ possède pour un cercle $|x|=r$ la moyenne arithmétique $\sum_0^\infty \frac{r^{2n}}{2^{2n}}$, qui devient, pour $r=\frac{1}{2}$,

$$\mathrm{M}_{\frac{1}{2}}\left|\sum \frac{x^n}{2^n}\right|^2 = \sum \frac{1}{2^{4n}} = \frac{16}{15},$$

et pour $r = 1$,

$$\sum \frac{1}{2^{2n}} = \frac{4}{3}.$$

Pour la série

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

il vient

$$\mathrm{M}_r\left|\log\frac{1}{1-x}\right|^2 = \sum \frac{r^{2n}}{n^2},$$

où $r < 1$; la même moyenne se trouve pour la fonction

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

car évidemment on a

$$\mathrm{M}_r\,|\log(1+x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n^2},$$

où $r < 1$; de sorte que les carrés des modules des deux fonctions $\log(1+x)$ et $\log\frac{1}{1-x}$ ont la même moyenne arithmétique pour les mêmes cercles.

Parmi les conséquences qu'on peut tirer du théorème énoncé, je ne mentionnerai que la suivante. En désignant par q_λ des quantités positives, nous aurons certainement l'inégalité

$$q_\mu^2 + q_\nu^2 > 2q_\mu q_\nu \qquad (\mu \neq \nu).$$

Formons cette inégalité pour toutes les valeurs de μ, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, $\mu \neq \nu$; nous trouverons facilement, par addition,

$$(m-1)\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu^2 > 2\sum_{\mu,\nu=1}^{m} q_\mu q_\nu \qquad (\mu \neq \nu).$$

Ajoutons aux deux membres de cette inégalité l'expression $q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_m^2$; il vient

$$m\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu^2 > \left(\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu\right)^2$$

ou

$$\sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu^2\right)} > \frac{\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu}{\sqrt{m}}.$$

Si nous posons maintenant

$$q_\mu = \left|f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right| \qquad \text{et} \qquad m = 2^n,$$

nous aurons

$$\sqrt{\frac{1}{2^n}\sum_{\mu=0}^{2^n-1}\left|f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2} > \frac{\sum_{\mu=0}^{2^n-1}\left|f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|}{2^n},$$

d'où il suit, à l'aide de l'équation (5), pour n infini,

$$\sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}} > \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{\mu=0}^{2^n-1}\left|f\left(r, \theta + \frac{2^{n-1}}{\mu\pi}\right)\right|.$$

A gauche, nous avons une quantité finie et déterminée; par conséquent, la quantité à droite devra être finie, et comme la somme $\sum\left|f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|$ est certainement divergente, il faut qu'elle devienne infinie du même ordre que 2^n.

D'autre part, le second membre représente la moyenne arithmétique des valeurs que le module de $f(x)$ parcourt pour le cercle $|x| = r$. Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La moyenne arithmétique des valeurs que le module de la fonction $f(x)$ parcourt pour tous les points du cercle $|x| = r$ est inférieure à la racine carrée de la moyenne arithmétique du carré de ces modules.*

Nous avons donc une limite supérieure de cette moyenne arithmétique; je n'ai pas encore réussi à en trouver une expression exacte par la méthode employée d'abord dans cette lettre.

Pour déterminer cette expression par l'autre méthode, on aurait à former

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a_\mu}\, r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}}\, d\theta.$$

Peut-être reviendrai-je une autre fois à cette expression.

Permettez-moi, monsieur, d'ajouter à ces lignes une nouvelle démonstration du théorème de M. Rouché, cité au commencement de cette lettre. Considérons la fonction

$$\frac{f(x)}{x^k} = \sum a_\nu x^{\nu-k} = \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k}[\cos(\nu - k)\theta + i\sin(\nu - k)\theta];$$

en intégrant, on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^k}\,d\theta$$

$$= \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \int_0^{2\pi} [\cos(\nu - k)\theta + i \sin(\nu - k)\theta]\, d\theta$$

$$= 2\pi a_k + \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \left\{ \left[\frac{\sin(\nu - k)\theta}{\nu - k}\right]_0^{2\pi} - i\left[\frac{\cos(\nu - k)\theta}{\nu - k}\right]_0^{2\pi} \right\} \qquad (\nu \neq k).$$

Chaque terme de la somme, et par suite la somme elle-même, devient zéro, de sorte que nous avons la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^k}\,d\theta = a_k,$$

ce qui démontre le théorème de M. Rouché d'une manière nouvelle.