Nouvelles annales de mathématiques

E. Cesàro

Sur les cercles inscrits à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 99-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__99_1>

SUR LES CERCLES INSCRITS A UN TRIANGLE;

PAR M. E. CESARO.

Soit, en coordonnées d'inertie, homogènes,

$$\sum A_{ij}\xi_i\xi_j = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une conique, et représentons par B_{ij} le complément algébrique de A_{ij} dans le discriminant Δ de la forme (1). On fera $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, $\xi_3 = 1$, pour restituer à l'équation sa forme ordinaire. Pour que la droite représentée par l'équation

$$\sum k_i \xi_i = 0$$

touche la conique, il faut que l'on ait

$$\sum B_{ij} k_i k_j = 0.$$

En particulier, le contact avec un côté du triangle fondamental est exprimé par l'équation précédente, en y supposant

$$k_1 = \frac{x_\nu}{a^2}, \qquad k_2 = \frac{y_\nu}{b^2}, \qquad k_3 = 4.$$

Il vient

$$B_{11} \frac{x_\nu^2}{a^4} + 2 B_{12} \frac{x_\nu y_\nu}{a^2 b^2} + B_{22} \frac{y_\nu^2}{b^4}$$
$$+ 8 B_{13} \frac{x_\nu}{a^2} + 8 B_{23} \frac{y_\nu}{b^2} + 16 B_{33} = 0.$$

Faisons $\nu = 1, 2, 3$, et additionnons les équations obtenues. Répétons ce calcul, après avoir multiplié l'équation précédente par x_ν, puis par y_ν. On parvient ainsi aux conditions

$$(2) \qquad \frac{B_{11}}{a^2} + \frac{B_{22}}{b^2} + 4 B_{33} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{B_{11}}{a^2} - \frac{B_{22}}{b^2} + \frac{8}{a^2 - b^2} (B_{13} \alpha + B_{23} \beta) = 0,$$

$$(4) \qquad B_{12} = \frac{4}{a^2 - b^2} (B_{23} a^2 \alpha - B_{13} b^2 \beta),$$

exprimant que la conique (1) est inscrite au triangle fondamental.

La condition (4) donne lieu à la remarque suivante. On sait que les coordonnées du centre de la conique sont données par les équations

$$B_{13} = B_{33} x_0, \qquad B_{23} = B_{33} y_0.$$

On a donc

$$B_{12} = \frac{4B_{33}}{a^2 - b^2}(a^2\alpha y_0 - b^2\beta x_0).$$

D'autre part,

$$A_{12}\Delta = \begin{vmatrix} B_{23} & B_{12} \\ B_{33} & B_{13} \end{vmatrix} = B_{33}^2 x_0 y_0 - B_{12}B_{33}.$$

Conséquemment,

$$A_{12}\Delta = B_{33}^2 \varphi(x_0, y_0),$$

pourvu que l'on pose

$$\varphi(x, y) = xy - \frac{4}{a^2 - b^2}(a^2\alpha y - b^2\beta x).$$

Lorsque A_{12} est nul, le centre est situé sur l'hyperbole $\varphi = 0$, et, par suite, son complémentaire barycentrique appartient à l'hyperbole de Kiepert. En d'autres termes, l'hyperbole de Kiepert est la figure complémentaire du lieu des centres des coniques inscrites, dont les axes sont parallèles aux axes de l'ellipse de Steiner. En particulier, il est clair que les complémentaires des centres des quatre cercles inscrits sont situés sur l'hyperbole de Kiepert.

Lorsque l'équation (1) représente une circonférence, de rayon r, la condition (4) devient $\varphi(x_0, y_0) = 0$; elle exprime la propriété énoncée en dernier lieu. De même, les conditions (2) et (3) deviennent

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) r^2 - 4,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{8}{a^2 - b^2}(\alpha x_0 + \beta y_0) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) r^2;$$

d'où, par élimination de r, on déduit $\psi(x_0, y_0) = 0$, après avoir posé

$$\psi(x, y) = x^2 - y^2 + 4\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}(\alpha x + \beta y) + 2(a^2 - b^2).$$

Les centres des cercles inscrits au triangle fondamental sont donc à l'intersection des hyperboles équilatères φ et ψ. On remarquera que ces hyperboles ont leurs centres aux points de Steiner et de Tarry, respectivement, et que la première passe par le barycentre, par le symétrique de l'orthocentre relativement au centre du cercle circonscrit, par les symétriques des sommets du triangle, relativement aux milieux des côtés opposés, etc.

L'équation $\varphi = 0$ permet de poser

$$x = \frac{4a^2\alpha}{a^2 + \lambda}, \qquad y = \frac{4b^2\beta}{b^2 - \lambda}.$$

Par substitution dans ψ, on trouve que les valeurs de λ sont données par l'équation

$$\begin{aligned}\lambda^4 + 6(a^2 + b^2)\lambda^3 + (9a^4 + 12a^2b^2 + 9b^4)\lambda^2 \\ + 2a^2b^2[7(a^2 + b^2) + 4(\alpha^2 + \beta^2)]\lambda + 9a^4b^4 = 0.\end{aligned}$$

Cela donne lieu à plusieurs remarques. Ainsi, en étendant les sommes aux abscisses et aux ordonnées des quatre centres, on trouve sans peine

$$\sum \frac{1}{x} = -\frac{a^2 - 3b^2}{2a^2\alpha},$$

$$\sum \frac{1}{y} = -\frac{3a^2 - b^2}{2b^2\beta},$$

$$\sum \frac{1}{x^2} = \frac{(a^2 + 3b^2)(5a^2 - 3b^2)}{8a^4\alpha^2},$$

$$\sum \frac{1}{y^2} = \frac{(3a^2 - b^2)(3a^2 + 5b^2)}{8b^4\beta^2},$$

$$\sum \frac{1}{xy} = \frac{(a^2 - 3b^2)(3a^2 - b^2)}{4a^2b^2\alpha\beta},$$

. . . .

On en déduit que les sommes des inverses des distances d'un axe de l'ellipse de Steiner aux centres des cercles inscrits est égale à l'inverse de la distance de la même droite au milieu du segment de Brocard. La somme des carrés des mêmes inverses est égale au produit des inverses des distances de l'axe considéré au milieu du segment de Brocard et au centre d'homologie du triangle fondamental et du triangle formé par les milieux des côtés du triangle de Brocard. On verrait de même que le centre du cercle circonscrit est le centre des moyennes distances des centres des cercles inscrits, etc.

Revenons aux hyperboles φ et ψ, et remarquons que les coniques passant par les centres des cercles inscrits sont représentées par $\varphi + m\psi = 0$. Ce sont donc des hyperboles équilatères. On sait que le lieu des centres de ces coniques est représenté par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire, dans le cas actuel, par l'équation

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{4a^2\alpha}{a^2 - b^2}\right)\left(x + 2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\alpha\right)\\ + \left(y + \frac{4b^2\beta}{a^2-b^2}\right)\left(y - 2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\beta\right) = 0,\end{aligned}$$

qui représente la circonférence circonscrite. C'est un résultat évident, si l'on observe que cette dernière ligne joue le rôle de circonférence des neuf points dans le triangle formé par les centres de trois cercles inscrits quelconques, et que le centre du quatrième cercle est l'orthocentre du même triangle.