FRITZ HOFMANN

Sur l’existence de trois racines réelles de l’équation qui détermine les axes principaux d’un cône

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 90-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__90_1>

SUR L'EXISTENCE DE TROIS RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION QUI DÉTERMINE LES AXES PRINCIPAUX D'UN CONE;

Par M. Fritz HOFMANN.

L'équation

$$(\Delta) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

(où tous les termes de la diagonale sont de la forme $a_{ii} - \lambda$, et où nous supposons $a_{ik} = a_{ki}$), c'est-à-dire l'équation *séculaire* (LAPLACE, *Mécan. cél.*, Ire Partie, p. 2, art. 56) donne des racines exclusivement réelles quand elle est résolue par rapport à λ.

La démonstration de ce théorème général a occupé les géomètres depuis longtemps. Parmi les démonstrations données, je mentionne celles qui se trouvent citées dans les *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, par M. SALMON, art. 26, exemple 10 (donnée par M. SYLVESTER, *Philosoph. Magazine;* 1852) et art. 46 (donnée par M. BORCHARDT, *Journal de Liouville*, t. XII, p. 50).

Nous tâcherons de donner une démonstration tout à fait élémentaire de ce théorème pour le cas où le degré de l'équation et le nombre des lignes et colonnes du déterminant (Δ) se réduisent à 3. C'est le cas qui revient le plus souvent dans la Géométrie pure et dans la Mécanique.

La solution de l'équation suivante

$$(\Delta_3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

équivaut à la solution du problème : déterminer les trois axes principaux d'un cône du deuxième degré. Nous nous proposons de démontrer que cette équation (Δ_3) a trois racines λ exclusivement réelles. Une partie de la démonstration sera de nature transcendante, en s'appuyant sur un théorème d'Analyse; la seconde partie nécessitera seulement les opérations les plus élémentaires de la Géométrie synthétique.

I. Étant donnée l'équation d'un cône dont l'origine est le sommet

$$
(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy, \end{aligned} \right.
$$

l'équation du plan polaire du point (x', y', z'), pris par rapport au cône (A), s'écrit

$$
(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')x \\ & + (a_{21}x' - a_{22}y' + a_{23}z')y \\ & + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')z. \end{aligned} \right.
$$

Si un point (x', y', z') de l'espace était connu dont le plan polaire (B) fût perpendiculaire au rayon mené de l'origine au point (x', y', z'), ce rayon même serait un axe principal du cône A.

Or on connaît l'équation d'un plan passant par l'origine et perpendiculaire à la droite qui joint l'origine à un point (x', y', z') :

$$
(\mathrm{C}) \qquad 0 = xx' + yy' + zz'.
$$

Les deux plans (B) et (C) coïncideront si les coefficients homologues des deux équations (B) et (C) sont égaux à un facteur λ près; c'est-à-dire si l'on a en même temps

$$
\left\{ \begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' &= \lambda x', \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' &= \lambda y', \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' &= \lambda z', \end{aligned} \right.
$$

ou

$$
(\mathrm{D}) \qquad \left\{ \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x' + a_{12}y' + a_{13}z' &= 0, \\ a_{21}x' + (a_{22} - \lambda)y' + a_{23}z' &= 0, \\ a_{31}x' + a_{32}y' + (a_{33} - \lambda)z' &= 0. \end{aligned} \right.
$$

En général, les coefficients a_{ik} et le facteur de proportionnalité λ pris *à volonté*, il n'y aura pas de solutions (x', y', z') communes aux trois équations du système (D). Mais, quand on a trouvé un λ qui rend les trois équations (D) accordables entre elles, la détermination des rapports $x' : y' : z'$ est un problème linéaire.

Mais c'est justement l'équation

$$\Delta_3 = 0$$

qui constitue la condition nécessaire et suffisante pour que les trois équations (D) puissent coexister. Pour déterminer les points x', y', z' situés sur un axe principal, il faut donc résoudre une équation du troisième degré en λ. Cette équation, étant de degré *impair*, a toujours au moins *une* racine réelle : c'est l'emploi de ce théorème appartenant à l'analyse qui constitue ce que nous avons nommé *la partie transcendante de notre démonstration*.

II. Après avoir déterminé *une* racine réelle de l'équation $\Delta_3 = 0$, nous retournerons au système (D) qui nous permet de trouver les rapports $x' : y' : z'$ en employant deux quelconques des trois équations (D).

Par exemple, de

$$\text{(E)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)\, x' + a_{12}\, y' + a_{13}\, z' = 0, \\ &a_{21}\, x' + (a_{22} - \lambda)\, y' + a_{23}\, z' = 0, \end{aligned} \right.$$

on tire

$$\text{(F)} \quad x' : y' : z' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} - \lambda \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Ainsi un axe principal du cône (A) est trouvé; nous l'appelons p. Il coïncide avec le rayon qui va de l'origine à tous les points de l'espace dont les coordonnées x', y', z' satisfont à (F); car, en substituant les valeurs x', y', z' dans les deux équations (B), on trouverait que ces deux plans coïncident.

Nous appellerons B_p le plan polaire d'un point (x', y', z') sur p; nous verrons plus tard que, pour nos conclusions, les deux cas, où B_p coupe le cône et où il ne le coupe pas, n'offrent pas de différence essentielle.

Sur ce plan polaire B_p d'un point (x', y', z') situé sur p, il y a un nombre infini de couples de droites qui passent par l'origine et sont conjuguées, deux à deux, par rapport au cône (A).

Si nous étions à même de déterminer un de ces couples dont les deux droites formeraient un angle droit à l'origine, nous aurions déterminé en même temps les deux axes principaux du cône qui restent encore inconnus.

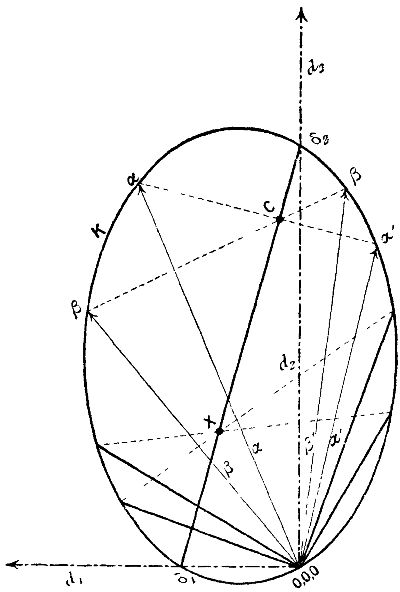
Car, imaginons deux droites d_1 et d_2, situées dans le plan polaire B_p de la ligne p, conjuguées par rapport au cône et perpendiculaires l'une à l'autre, passant par l'origine, comme cela doit être. Le plan polaire du rayon d_1 passera par p et par d_2 et sera perpendiculaire à d_1, puisqu'il contient deux droites p et d_2 qui sont perpendiculaires à d_1. Donc d_1 et d_2 seraient les deux autres axes principaux du cône.

Pour trouver les deux rayons par l'origine dans le plan B_p, qui soient en même temps conjugues pour (A) et perpendiculaires entre eux, on mènera dans le plan B_p une section conique K par l'origine (*fig.* 1). On construira, quand B_p ne coupe pas le cône, deux fois un couple de deux droites conjuguées par rapport à (A), par exemple les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$.

On sait qu'après avoir construit le point C de la manière indiquée dans la figure (comme point d'intersection des deux droites qui joignent les points où les droites d'un couple rencontrent la section conique), on peut l'employer pour donner tous les couples de droites conjuguées du plan B_p.

On sait de même que, quand on inscrit un triangle quelconque à angle droit dans la section conique K, de manière que le sommet de l'angle droit coïncide avec un point fixe o, o, o de la section conique, l'hypoténuse de ce triangle passe toujours par un point fixe X *à l'intérieur* (1) de la section conique.

Fig. 1.



En joignant les deux points X et C, on obtient deux points d'intersection de cette droite de jonction avec K : δ_1, δ_2.

Les rayons qui vont de l'origine à δ_1 et δ_2 sont les deux axes d_1, d_2 cherchés; on sait qu'ils sont conjugués par rapport au cône, puisque le point C (le centre de

---

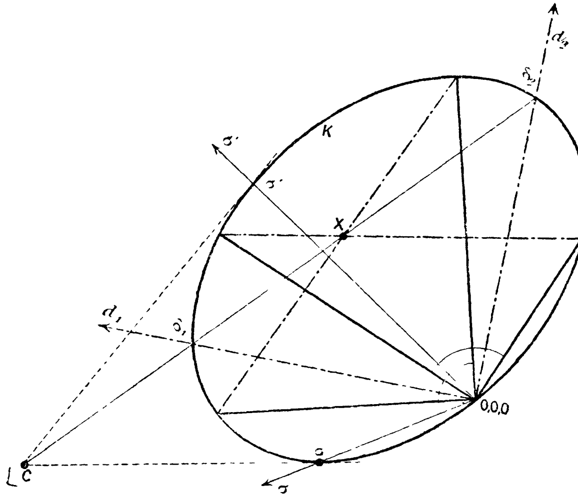
(1) Si le point X pouvait se trouver *extérieur* à la section conique, il fournirait deux points de contact ξ_1, ξ_2 réels de ses tangentes à K; mais les deux droites qui forment un angle droit ne peuvent jamais coïncider en une seule droite (o, o, o) à ξ_1.

l'involution) est sur la même droite avec les deux points où le couple $d_1 d_2$ rencontre la section conique; on sait de même qu'ils sont perpendiculaires, puisque cette droite passe par X.

La *fig.* 1 se rapporte au cas où le plan polaire de la droite p n'aurait pas coupé le cône (A). Mais, quand le plan B_p rencontre le cône (A) en deux droites réelles, la figure et la construction de $d_1 d_2$ se simplifient encore.

Étant données les deux droites $\sigma\sigma'$ où B_p rencontre le cône (A), on construira les tangentes à K aux points d'intersection de σ et σ' avec K; ce qui donne un point d'intersection de ces deux tangentes C (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les constructions suivantes sont les mêmes qu'auparavant. On joindra X et C, ce qui donne deux points d'intersection δ_1, δ_2 sur la courbe K. Les rayons qui vont de l'origine à δ_1 et δ_2 sont encore les solutions cherchées. Les droites d_1 et d_2 sont conjuguées par rapport à (A), puisqu'elles séparent en rapport harmonique les directions σ et σ' ; elles sont perpendiculaires puisque la droite $\delta_1 \delta_2$ passe par X.

La substitution des coordonnées $x'_1 : y'_1 : z'_1$ ou $x'_2 : y'_2 : z'_2$ (de points situés sur l'un ou l'autre de ces axes principaux) dans une équation quelconque du système (D) donnerait directement les deux valeurs de λ qui satisferaient à l'équation (Δ_3). On voit qu'elles sont bien réelles, puisque les coordonnées $x'_1 : y'_1 : z'_1$ ou $x'_2 : y'_2 : z'_2$, qui les établissent au moyen de (D), ont été trouvées *réelles*. Car une droite quelconque XC menée par un point X *à l'intérieur* d'une section conique coupera toujours la section conique en deux points δ_1, δ_2 *réels*.

On voit que c'est, en fin de compte, une *banalité* qui permet de démontrer la réalité des racines de l'équation séculaire, quand celle-ci est du troisième degré.

Malheureusement notre méthode ne saurait être étendue à des degrés supérieurs à trois; hâtons-nous d'ajouter qu'elle ne veut prétendre ni à grande portée, ni à grande profondeur : elle ne veut que populariser en quelque sorte le résultat de l'Algèbre, en montrant que la géométrie synthétique, une racine λ une fois écartée par un procédé transcendant, sait non seulement *démontrer la réalité* des deux autres racines, mais encore les *construire*.