H. LAURENT

Sur la théorie de l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 60-65

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__60_0>

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

Je me propose de faire connaître, dans ce travail, une nouvelle méthode d'élimination applicable à un nombre quelconque d'équations algébriques.

Considérons d'abord deux équations algébriques

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

des degrés respectifs m et n. Pour résoudre ces deux équations, on peut commencer par éliminer x; à cet effet on peut, comme je l'ai montré dans un des derniers numéros de ce Journal, former les équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = 0,$$

où φ_1 désigne le reste de la division de φ par ψ, φ_2 le reste de la division de $x\varphi_1$ par ψ, ... Ces équations (2) fournissent, par l'élimination de x, x^2, ..., x^{m-1}, la résultante cherchée que j'appellerai

$$(3) \qquad R = 0.$$

Supposons cette équation résolue; si, dans les équations (2), on remplace y par une des racines de (3), ces équations feront connaître la valeur de x, ou plutôt les valeurs de x, x^2, ..., x^{n-1}, qu'il faut associer à la valeur considérée de y pour avoir une solution des équations (1).

Je ne discuterai pas les équations (2); je ferai seulement observer que, si l'équation (3) n'a pas de solutions multiples, ce que nous supposerons, les valeurs de x, qu'il faut associer à chacune des racines de (3) pour former une solution de (1), sont des fonctions rationnelles de y. En effet, les équations (2) sont du premier degré en x^0, x, x^2, ..., x^{n-1}, et leur déterminant R est nul sans que tous ses mineurs le soient; car, si tous les mineurs de R étaient nuls, en appelant M l'un d'eux, on aurait

$$\frac{dR}{dy} = \Sigma M \frac{dM}{dy},$$

et $\frac{dR}{dy}$ serait nul, $R = 0$ aurait une racine multiple.

Toute valeur de x, qui, associée à une racine y de $R = 0$, fournit une solution de (1), est donc une fonction rationnelle des coefficients de (2), c'est-à-dire de y racine de $R = 0$; on en conclut que :

Toute fonction rationnelle d'une solution de (1) *s'exprime rationnellement en fonction d'une racine y de* $R = 0$.

Mais toute fonction rationnelle de y s'exprime sous la forme d'un polynôme entier de degré $mn - 1$ en y, car mn est le degré de R en y; donc :

Toute fonction rationnelle d'une solution de (1) *peut se mettre sous la forme d'un polynôme entier de degré $mn - 1$ en y racine de* $R = 0$.

Cela posé, supposons que l'on veuille éliminer x et y entre les équations

$$(4) \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \chi = 0,$$

φ et ψ ayant la même signification que tout à l'heure et χ désignant un polynôme de degré p en x et y. Supposons d'abord que l'équation (3) n'ait pas de solution multiple; on pourra exprimer $\chi(x, y)$ sous la forme d'un polynôme entier en y de degré $mn - 1$, et cela bien facilement, puisque x peut être calculé en fonction de y au moyen des équations (2); on exprimera de même $y\chi$, $y^2\chi$, ..., $y^{mn-1}\chi$, ce qui pourra d'ailleurs se faire en divisant ces quantités par R et en les remplaçant par leurs restes dès que χ aura été lui-même exprimé en y. Soit alors, en faisant $\varpi = mn$,

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{r}
\chi = c_{00} + c_{01}y + \ldots + c_{0,\varpi-1}y^{\varpi-1},\\
y\chi = c_{10} + c_{11}y + \ldots + c_{1,\varpi-1}y^{\varpi-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{\varpi-1}\chi = c_{\varpi-1,0} \quad \ldots \quad c_{\varpi-1,\varpi-1}y^{\varpi-1}.
\end{array}\right.$$

Je dis que le déterminant $\Sigma \pm c_{00}c_{11}\ldots c_{\varpi-1,\varpi-1} = S$ sera le premier membre de la résultante des équations (4). En effet, appelons (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_ϖ, y_ϖ) les solutions des équations (1) et désignons en général par F_i ce que devient la fonction $F(x, y)$ quand on y remplace x et y par x_i et y_i; les équations (5) ont lieu quand on y remplace x et y par x_1 et y_1, x_2 et y_2, ... Elles montrent alors que le déterminant

$$(6)\qquad \begin{vmatrix}
\chi_1 & y_1\chi_1 & \ldots & y_1^{\varpi-1}\chi_1\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\chi_\varpi & y_\varpi\chi_\varpi & \ldots & y_\varpi^{\varpi-1}\chi_\varpi
\end{vmatrix}$$

est égal au produit de S par

$$(7)\qquad \begin{vmatrix}
1 & y_1 & \ldots & y_1^{\varpi-1}\\
1 & y_2 & \ldots & y_2^{\varpi-1}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
1 & y_\varpi & \ldots & y_\varpi^{\varpi-1}
\end{vmatrix},$$

produit des différences des racines de $R = 0$, toutes distinctes par hypothèse. Mais, à l'inspection de ce déterminant (6), on voit qu'il est le produit du déterminant (7) par $\chi_1\chi_2\ldots\chi_\varpi$; on a donc

$$S=\chi_1\chi_2\ldots\chi_\varpi.$$

$S=0$ est donc bien la résultante des équations (4).

Maintenant, supposons que l'équation (3) ait une solution multiple; la solution que nous allons exposer a cela de remarquable qu'elle fournira la résultante, quelle que soit la définition que l'on conviendra d'en donner. Supposons, pour fixer les idées, que l'équation (3)

$$R=0$$

n'ait qu'une racine multiple et que cette racine soit double; soit $y_\varpi=y_{\varpi-1}$ cette racine: on pourra en débarrasser $R=0$. Soit $R'=0$ l'équation qui a pour racines $y_1, y_2, \ldots, y_{\varpi-2}$; les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{\varpi-2}$ seront rationnelles en $y_1, y_2, \ldots y_{\varpi-2}$ respectivement. Toute fonction rationnelle de x_i et y_i où $i<\varpi-1$ pourra se mettre sous la forme d'un polynôme entier de degré $\varpi-3$ en y_i; si l'on pose alors

$$\begin{gathered}\chi_i=a_{00}+a_{01}y_i+\ldots+a_{0,\varpi-3}y^{\varpi-3},\\ y_i\chi_i=a_{10}+a_{11}y_i+\ldots+a_{1,\varpi-3}y^{\varpi-3},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

on prouvera, en suivant une méthode analogue à celle dont on vient de faire usage, que, si l'on désigne par T le déterminant $\Sigma\pm a_{00}a_{11}\ldots a_{\varpi-3,\varpi-3}$, on aura

$$T=\chi(x_1,y_1)\chi(x_2,y_2)\ldots\chi(x_{\varpi-2},y_{\varpi-2});$$

donc

$$T\chi(x_{\varpi-1},y_{\varpi-1})\chi(x_\varpi,y_\varpi)=0$$

sera la résultante des équations (4). Si $x_{\varpi-1}=x_\varpi$, la résultante, suivant les conventions que l'on voudra faire, sera

$$T\chi^2(x_\varpi,y_\varpi)=0 \qquad \text{ou} \qquad T\chi(x_\varpi,y_\varpi)=0.$$

car l'une et l'autre équation expriment que les équations (4) ont une solution commune.

$x_{\varpi-1}$ et x_ϖ sont racines d'une équation du second degré ; mais il est clair que

$$\chi(x_{\varpi-1}, y_\varpi)\chi(x_\varpi, y_\varpi)$$

ne renfermera pas d'irrationnalités. On voit sans peine comment il faudrait procéder si $R = 0$ avait plusieurs racines multiples d'ordre égal ou supérieur au second.

On voit aussi comment la méthode précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations algébriques ; en particulier, s'il s'agit d'éliminer x, y, z entre les quatre équations

$$(8) \quad \varphi(x,y,z) = 0, \quad \psi(x,y,z) = 0, \quad \chi(x,y,z) = 0, \quad \theta(x,y,z) = 0$$

des degrés respectifs m, n, p, q, on formera la résultante

$$S = 0,$$

provenant de l'élimination de x et y entre les trois premières. Appelant (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... les solutions communes à ces équations, on formera

$$\theta(x_i, y_i, z_i), \quad z_i\theta(x_i, y_i, z_i), \quad \ldots.$$

que l'on exprimera sous forme de polynômes entiers de degré $mnp - 1$ en z. Le déterminant des coefficients de ces polynômes égalé à zéro fournira la résultante.

La méthode que nous venons d'exposer a cet avantage sur toutes celles qu'on a données jusqu'ici, qu'elle conduit à des calculs que l'on peut à la rigueur effectuer, et qu'elle fournit une résultante dont on a la signification précise.

C'est la théorie des équivalences algébriques qui m'a conduit à la méthode que je viens d'exposer ; c'est en s'appuyant sur cette théorie qu'il conviendrait de la présenter; elle gagnerait ainsi en élégance, en simplicité et surtout en généralité, mais elle risquerait de rebuter les élèves de Mathématiques spéciales pour qui ces lignes sont écrites.

Je ne veux pas abandonner ce sujet avant d'avoir montré comment on peut profiter des théories précédentes pour calculer les fonctions symétriques des solutions de plusieurs équations algébriques. Considérons les trois équations

$$(9)\qquad \varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0, \qquad f(x, y, z) = 0$$

et soient

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (x_\varpi, y_\varpi, z_\varpi)$$

leurs solutions communes. Le calcul d'une fonction symétrique revient au calcul d'expressions de la forme

$$\Sigma\theta(x_i, y_i, z_i).$$

Supposons donc qu'il s'agisse de calculer l'expression

$$\Sigma\theta(x_i, y_i, z_i),$$

θ désignant une fonction entière de x_i, y_i, z_i; posons

$$(10)\qquad t - \theta(x, y, z) = 0$$

Éliminons x, y, z entre les équations (9) et (10) en suivant la méthode donnée plus haut; le résultant en t se présentera sous forme de déterminant et la fonction symétrique $\Sigma\theta$ sera au signe près le coefficient de $t^{\varpi-1}$ dans le développement de ce déterminant.