NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. HUMBERT

Sur les arcs des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 5-8

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__5_0>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR LES ARCS DES COURBES PLANES;

PAR M. G. HUMBERT.

Nous avons énoncé, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (2^e semestre 1887), un théorème qui constitue l'extension à une courbe algébrique quelconque de la célèbre proposition de Graves et Chasles, sur les arcs de conique : la démonstration de ce théorème généralisé peut être donnée d'une manière tout à fait élémentaire, de la manière suivante.

Nous nous appuierons sur une proposition, aujourd'hui bien connue et que Laguerre a énoncée le premier :

La somme des angles que font avec un axe fixe les rayons qui joignent le centre d'un cercle aux points d'intersection du cercle et d'une courbe algébrique donnée reste constante si le rayon du cercle varie, son centre demeurant fixe.

En transformant cette propriété par polaires réciproques, on voit que :

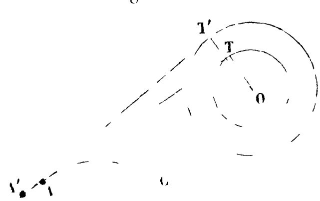
La somme des angles que font avec un axe fixe les tangentes communes à une courbe algébrique et à un cercle reste constante si le rayon du cercle varie, son centre demeurant fixe.

Cela posé, soit C une courbe algébrique quelconque; menons les tangentes communes à cette courbe et à deux cercles voisins de même centre O, de rayons R et R + dR. Soient AT et A′T′ deux de ces tangentes, infiniment voisines. On a évidemment

$$A'T' - AT = \text{arc}\, AA' + R.\widehat{TOT'}.$$

Or l'angle TOT′ est égal à celui des tangentes A′T′ et AT; soit $d\theta$ cet angle : il vient, en désignant par t la

Fig. 1.



longueur de la *tangente commune* AT, par $t + dt$ celle de A′T′, par ds l'arc AA′,

$$ds = dt - R\,d\theta.$$

Si l'on fait la somme de toutes les équations analogues, relatives à tous les points de contact de la courbe C avec les tangentes communes à cette courbe et au cercle R, il vient, puisque $\Sigma\, d\theta = 0$, d'après le théorème rappelé plus haut,

$$\Sigma\, ds = \Sigma\, dt.$$

En d'autres termes :

Si l'on mène toutes les tangentes communes à une courbe algébrique et à un cercle, et si l'on fait ensuite varier le rayon du cercle, son centre restant fixe, les points de contact sur la courbe décrivent des arcs dont *la somme algébrique est égale à la variation de la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.*

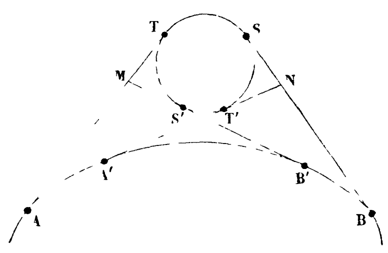
Si, en particulier, on suppose que l'un des cercles considérés a son rayon nul, on voit sans difficulté que :

Les 2ν points de contact d'une courbe de classe ν avec les tangentes communes à cette courbe et à un cercle peuvent être groupés deux à deux, de manière à déterminer sur la courbe ν arcs dont la somme algébrique est égale à la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

C'est cette proposition qui, dans le cas des coniques, donne le théorème si connu sur les arcs d'ellipse ou d'hyperbole.

Considérons en effet une ellipse, menons les quatre tangentes communes à cette courbe et à un cercle.

Fig. 2.



Le théorème qui vient d'être démontré apprend qu'on a

$$\text{arc}\, AA' - \text{arc}\, BB' = AT - A'T' - BS + B'S',$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}\text{arc}\, AB' - \text{arc}\, A'B &= (AM + MS') - A'T' - (BN + NT') - B'S' \\ &= AM + B'M - (A'N - BN).\end{aligned}$$

ou enfin

$$AM + B'M - \text{arc}\,AB' = A'N + BN - \text{arc}\,A'B.$$

Si l'on remarque maintenant que, d'après un théorème connu, ces points M et N sont sur une même ellipse homofocale à la proposée, on voit que l'équation précédente revient précisément au théorème de Graves et de Chasles.