NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESARO

Calcul de sous-invariants

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 464-467

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__464_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CALCUL DE SOUS-INVARIANTS;

Par M. E. CESARO.

M. d'Ocagne a observé que, si l'on considère a_0 comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient $a_1, a_2, a_3, \ldots$, l'expression

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p l a_0}{d\xi^p}$$

est un sous-invariant de la forme binaire, représentée symboliquement par $(x + ay)^n$. L'emploi de l'algorithme isobarique

$$\underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \varepsilon_r,$$

exprimant la somme de tous les produits analogues à $\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \ldots \varepsilon_{r_i}$, où $r_1 + r_2 + \ldots + r_i = p$ en nombres entiers et positifs, permet d'obtenir aisément l'expression de φ_p. En effet, la formule générale pour la dérivation des fonctions de fonction, que nous avons donnée dans ce Journal (p. 46, § 13; 1885), devient, dans le cas actuel,

$$\varphi_p = p! \sum_{i=1}^{i=p} \left[(-1)^{i-1} \frac{a_0^{p-i}}{i} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left(\frac{a_r}{r!} \right) \right].$$

Il est facile de démontrer le théorème de M. d'Ocagne en partant de la dernière expression et en utilisant la formule connue, presque évidente,

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_\nu}\mathop{S}_{p}^{i}\varepsilon_r = i\mathop{S}_{p-\nu}^{i-1}\varepsilon_r.$$

On a d'abord

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial a_\nu} = \frac{p!}{\nu!}\sum_{i=1}^{i=p}\left[(-1)^{i-1}a_0^{p-i}\mathop{S}_{p-\nu}^{i-1}\left(\frac{a_r}{r!}\right)\right],$$

et l'on voit que le coefficient de $(-1)^i p!\,a_0^{p-i}$ dans

$$a_0\frac{\partial\varphi_p}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi_p}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial\varphi_p}{\partial a_3}+\ldots+pa_{p-1}\frac{\partial\varphi_p}{\partial a_p}$$

est

$$\mathop{S}_{p-1}^{i}\left(\frac{a_r}{r!}\right)-\sum_{\nu=1}^{\nu=p-1}\left[\frac{a_\nu}{\nu!}\mathop{S}_{p-\nu-1}^{i-1}\left(\frac{a_r}{r!}\right)\right].$$

Cette expression est identiquement nulle, à cause de la relation évidente

$$\mathop{S}_{p}^{i}=\varepsilon_1\mathop{S}_{p-1}^{i-1}+\varepsilon_2\mathop{S}_{p-2}^{i-1}+\varepsilon_3\mathop{S}_{p-3}^{i-1}+\ldots.$$

Donc

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\nu\,a_{\nu-1}\frac{\partial\varphi_p}{\partial a_\nu}=0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Inversement, il est facile d'exprimer les nombres a au moyen des nombres φ. En introduisant la fonction symbolique $e^{a\xi}$, on peut écrire

$$\varphi_p = a_0^p\left(\frac{d^p\,l e^{a\xi}}{d\xi^p}\right)_{\xi=0},$$

d'où l'on déduit

$$e^{a\xi}=a_0 e^{e^{\frac{\varphi\xi}{a_0}}}.$$

Donc

$$a_p = a_0 \left(\frac{d^p e^{e^{\frac{\varphi\xi}{a_0}}}}{d\xi^p} \right)_{\xi=0}$$

ou bien, en vertu de la formule de dérivation invoquée plus haut,

$$a_p = \frac{p!}{a_0^{p-1}} \sum_{i=1}^{i=p} \left[\frac{1}{i!} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left(\frac{\varphi_r}{r!} \right) \right].$$

M. d'Ocagne s'est également préoccupé des relations qui existent entre les sous-invariants φ_p et les sous-invariants principaux définis, comme on sait, par les égalités symboliques

$$\nu_{2p} = \tfrac{1}{2}(a - a)^{2p}, \qquad \nu_{2p+1} = a_0 \nu'_{2p} - 2a_1 \nu_{2p}.$$

Les relations dont il s'agit sont faciles à découvrir. Si l'on commence par limiter la recherche aux ν à indice pair, en supposant que les ν à indice impair soient nuls, on a

$$e^{\nu\xi} = \tfrac{1}{2} e^{(a-a)\xi} = \frac{a_0^2}{2} e^{e^{\frac{\varphi\xi}{a_0}} + e^{-\frac{\varphi\xi}{a_0}}};$$

puis

$$\nu_{2p} = (2p)! \frac{a_0^2}{2} \sum_{i=1}^{i=2p} \left\{ \frac{1}{i!} \underset{2p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left[\frac{1-(-1)^r}{a_0^r} \frac{\varphi_r}{r!} \right] \right\}.$$

Or on a, évidemment,

$$\underset{2p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \{[1 + (-1)^r] \varepsilon_r\} = 2^i \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \varepsilon_{2r}.$$

Donc

$$\nu_{2p} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

On trouve, de même,

$$\varphi_{2p} = (2p)! \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-2)^{i-1} \frac{a_0^{2p-2i}}{i} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

Ce sont là les formules prévues par M. d'Ocagne dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (11^e^ année, p. 317).