NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOFFROY

Nouveau théorème relatif aux circonférences tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 461-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__461_1>

NOUVEAU THÉORÈME RELATIF AUX CIRCONFÉRENCES TANGENTES;

PAR M. JOFFROY,
Professeur au lycée de Nantes.

1. Avec quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 pris trois à trois je forme quatre combinaisons de cercles et je trace les huit circonférences tangentes à chaque combinaison.

J'appelle *circonférences inverses* deux circonférences telles que l'une enveloppe, en les touchant, les cercles que l'autre n'enveloppe pas en les touchant et réciproquement.

On sait que, pour chaque combinaison de trois cercles, les lignes des centres de deux circonférences directes passent par le centre radical des trois cercles. Les quatre combinaisons de cercles donnent donc lieu à seize lignes de centres formant quatre faisceaux de quatre droites.

Mon théorème consiste en ce que ces quatre faisceaux en se croisant forment huit autres faisceaux de quatre droites.

Pour faire connaître clairement ces faisceaux, j'adopte la notation suivante :

Je désigne par $C_1(C_2C_3)$ la circonférence ou le centre de la circonférence qui touche les cercles C_1, C_2, C_3

en enveloppant les cercles C_2, C_3 et je désigne par

$$[C_1(C_2C_3)][(C_1)C_2C_3]$$

la ligne des centres de cette circonférence et de la circonférence inverse $(C_1)\,C_2C_3$.

Forment un faisceau ou concourent en un même point les quatre droites

$$\begin{gathered}[C_1(C_2C_3)][(C_1)C_2C_3],\\ [C_1(C_2C_4)][(C_1)C_2C_4],\\ [C_1(C_3C_4)][(C_1)C_3C_4],\\ [(C_2C_3C_4)][C_2C_3C_4].\end{gathered}$$

Concourent en un second point quatre droites que l'on désigne clairement en augmentant d'une unité les indices 1, 2, 3 et remplaçant 4 par 1 dans la notation des quatre droites précédentes.

Concourent en un troisième point quatre droites désignées en faisant le même changement aux indices des quatre dernières.

Un nouveau changement d'indices donne les noms des quatre droites d'un quatrième faisceau.

Le cinquième faisceau est le suivant :

$$\begin{gathered}[(C_1C_2C_3)][(C_1C_2C_3)],\\ [(C_1C_3C_4)][C_1C_3C_4],\\ [(C_1C_2C_4)][C_1C_2C_4],\\ [(C_2C_3C_4)][C_2C_3C_4].\end{gathered}$$

Voici le sixième faisceau :

$$\begin{gathered}[C_1(C_2C_3)][(C_1)C_2C_3],\\ [C_4(C_2C_3)][(C_4)C_2C_3],\\ [C_2(C_1C_4)][(C_2)C_1C_4],\\ [C_3(C_1C_4)][(C_3)C_1C_4].\end{gathered}$$

Une permutation circulaire donne le septième faisceau et une seconde permutation donne le huitième.

2. Cela posé, voici la démonstration géométrique du théorème.

Sur les quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4, qui sont dans le même plan, je décris des sphères. On fait voir aisément que les centres des sphères tangentes extérieurement à trois sphères C_1, C_2, C_3 sont dans un plan perpendiculaire au plan $C_1C_2C_3$ et dont la trace sur celui-ci passe par l'axe radical des cercles C_1, C_2, C_3, par le centre de la circonférence tangente extérieurement à ces cercles et par le centre de la circonférence qui les touche en les enveloppant. Cette trace est donc la ligne des centres désignée par

$$[(C_1C_2C_3)][C_1C_2C_3].$$

Soit maintenant une sphère tangente aux quatre sphères C_1, C_2, C_3, C_4.

Elle est tangente à chacune des combinaisons de cercles suivantes :

$$\begin{array}{lll} C_1, & C_2, & C_3, \\ C_1, & C_2, & C_4, \\ C_1, & C_3, & C_4, \\ C_2, & C_3, & C_4 : \end{array}$$

donc son centre est sur quatre plans perpendiculaires au plan $C_1C_2C_3C_4$. Ces plans se coupent donc suivant une normale à celui-ci et leurs traces sur celui-ci, c'est-à-dire les quatre lignes des centres

$$\begin{array}{l} [(C_1C_2C_3)][C_1C_2C_3], \\ [(C_1C_2C_4)][C_1C_2C_4], \\ [(C_1C_3C_4)][C_1C_3C_4], \\ [(C_2C_3C_4)][C_2C_3C_4], \end{array}$$

concourent en un même point et constituent le huitième faisceau.

Pour trouver les trois autres faisceaux, j'imagine une sphère tangente laissant une sphère sur les quatre ou deux sphères sur les quatre en dehors d'elle. Le centre de cette sphère tangente aux quatre proposées est sur quatre plans se coupant suivant une droite et coupant le plan $C_1C_2C_3C_4$ suivant quatre lignes de centres concourantes.