MARCHAND

Développement de l'accroissement d'un polynôme entier suivant les puissances des accroissements des variables

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 456-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__456_1>

DÉVELOPPEMENT DE L'ACCROISSEMENT D'UN POLYNOME ENTIER SUIVANT LES PUISSANCES DES ACCROISSEMENTS DES VARIABLES;

PAR M. MARCHAND.

Cette question, d'un intérêt capital en Géométrie analytique, est placée dans les programmes de l'École Polytechnique immédiatement après la formule du binôme, avant les séries et les dérivées. Il semble donc qu'il y ait lieu de chercher une démonstration qui reste simple, quel que soit le nombre de variables, et qui n'exige pas l'établissement préalable de la formule de Taylor généralisée.

Parmi les différentes méthodes que l'on peut proposer dans ce but, il en est une qui me semble présenter un intérêt particulier dans l'état actuel de la Science : elle consiste à appliquer déjà à ce problème la notation symbolique sur laquelle les savants allemands font reposer toute la théorie des invariants et covariants. L'exposition n'est guère pénible, même si l'on prend la précaution d'expliquer en détail l'esprit de la méthode.

1° *Notation symbolique.* — Soit une forme binaire d'ordre n

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + \frac{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots.$$

Le cas particulier le plus simple est fourni par

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2)^n,$$

qu'on peut écrire, d'une manière abrégée,

$$b_x^n.$$

Si, dans une question particulière, on est conduit à une relation du premier degré par rapport aux coefficients

$$(1) \qquad \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

il est clair que l'on en déduit

$$(2) \qquad \lambda_0 b_1^n + \lambda_1 b_1^{n-1} b_2 + \ldots + \lambda_n b_2^n.$$

Comme, d'ailleurs, à deux relations de la forme (1) distinctes correspondent deux relations de la forme (2) distinctes, on peut inversement de la formule (2) supposée seule connue conclure, sans ambiguïté, la formule (1) qui lui a donné naissance.

Si donc il ne s'agit que de relations purement linéaires par rapport aux coefficients de $f(x_1, x_2)$, on peut prendre b_x^n comme représentation symbolique de ce polynôme. On entend par là que l'on effectuera les calculs avec l'expression simple $(b_1 x_1 + b_2 x_2)^n$ comme si b_1 et b_2 étaient des nombres donnés, et que l'on remplacera dans le résultat

$$\begin{array}{ccc} b_1^n & \text{par} & a_0, \\ b_1^{n-1} b_1 & \text{par} & a_1, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_2^n & \text{par} & a_n. \end{array}$$

2° *Dérivées d'un polynôme à une seule variable.* — Le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h est évidemment linéaire par rapport aux coefficients. Il s'obtiendra en prenant

$$[b_1(x-h)+b_2]^n = (b_x + hb_1)^n = b_x^n + \frac{n}{1} h b_1 b_x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} h^2 b_1^2 b_x^{n-2} + \ldots.$$

Le coefficient de $\frac{h}{1}$, que l'on appellera *dérivée première*, est égal à

$$\frac{n}{1} b_x^{n-1} b_1 = \frac{n}{1}\left(b_1^n x^{n-1} + \frac{n-1}{1} b_1^{n-1} b_2 x^{n-2} + \ldots \right)$$
$$= na_0 x^{n-1} + (n-1)\frac{n}{1} a_1 x^{n-2} + (n-2)\frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-3} + \ldots.$$

On tire de là la règle ordinaire pour passer de $f(x)$ à $f'(x)$. Si le polynôme primitif est multiplié par une constante λ, on a λb_x^n et ensuite $\lambda n b_x^{n-1} b_1$; la dérivée est aussi multipliée par λ.

Si donc $nb_x^{n-1} b_1$ est la dérivée première de b_x^n, $n(n-1) b_x^{n-2} b_1^2$ sera la dérivée première de $nb_x^{n-1} b_1$.

Par conséquent, si l'on appelle *dérivée seconde* le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ dans le développement, la dérivée seconde est la dérivée première de la dérivée première, etc.

Les différentielles s'obtiendraient avec une égale facilité.

3° *Dérivées partielles d'un polynôme à plusieurs variables.* — Je désignerai par $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les p variables indépendantes, par $y_1, y_2, \ldots, y_p$ leurs accroissements. Par exemple, pour deux variables indépendantes (coniques), on fera $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $y_1 = h, y_2 = k, y_3 = 0$.

Soit donc

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum \frac{P_n}{P_\alpha \ldots P_\lambda} a_{\alpha, \beta, \ldots, \lambda} x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_p^\lambda.$$

On posera symboliquement

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (b_1 x_1 + \ldots + b_p x_p)^n = b_x^n.$$

La dérivée partielle par rapport à l'une des variables x_1 sera, d'après sa définition, $n b_1 b_x^{n-1}$. Si λ est une constante, la dérivée de λb_x^n sera $\lambda n b_1 b_x^{n-1}$.

On vérifiera facilement l'identité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = n(n-1) b_\alpha b_\beta b_x^{n-2} = \frac{\partial f}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}.$$

L'ordre des dérivations est donc indifférent.

La différentielle totale prend une expression symbolique très simple

$$n(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots) b_x^{n-1} = n b_y b_x^{n-1}.$$

On voit encore que, λ étant une constante, on aura

$$d(\lambda f) = \lambda\, df.$$

Par suite, la différentielle seconde, c'est-à-dire la différentielle première de la différentielle première, aura pour expression

$$n(n-1)b_y^2 b_x^{n-2},$$

la différentielle troisième, etc.

4° *Développement général.* — Si l'on donne à x_1, $x_2, \ldots, x_p$ les accroissements $y_1, y_2, \ldots, y_p$, en supposant si l'on veut

$$x_p = 1, \qquad y_p = 0,$$

on aura évidemment

$$b_1(x_1+y_1) + b_2(x_2+y_2) + \ldots = b_x + b_y,$$

$$\Delta f = (b_x + b_y)^n = b_x^n + \frac{n}{1} b_x^{n-1} b_y + \ldots.$$

D'après la définition des différentielles, ceci peut s'écrire

$$\Delta f = f + \frac{df}{1} + \frac{d^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{d^n f}{1.2\ldots n}.$$

L'expression des coefficients en fonction des dérivées partielles est facile à obtenir. On a

$$d^\alpha f = n(n-1)\ldots(n-\alpha+1) b_y^\alpha b_x^{n-\alpha}.$$

Soit $C b_1^{\beta_1} \ldots b_{p-1}^{\beta_{p-1}}$ un coefficient quelconque de b_y^α; il donnera dans $d^\alpha f$

$$n(n-1)\ldots(n-\alpha+1) C b_1^{\beta_1} \ldots b_{p-1}^{\beta_{p-1}} b_x^{n-\alpha} = C \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_{p-1}^{\beta_{p-1}}}.$$

On retombe sur l'expression

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^\alpha f(xyz).$$

(*Cours d'Analyse* de M. Laurent, t. I, p. 142.)

Il est d'ailleurs bon d'observer que la forme symbolique $b_y^\alpha b_x^{n-\alpha}$ peut être conservée avec avantage en Géométrie analytique. Elle représente la polaire d'ordre α

du point $y_1 y_2 y_3$ relativement à la courbe $b_x^n = 0$ et permet de résoudre les problèmes les plus usuels de la Géométrie analytique. (Voir *Leçons sur la Géométrie,* par A. Clebsch, recueillies par F. Lindemann, traduites par A. Benoit.)