Nouvelles annales de mathématiques

Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 449-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__449_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887 [1];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1° Lorsqu'on passe d'un carré au suivant dans la même file oblique, l'ordonnée augmente d'une unité, l'abscisse diminue d'une unité; donc la somme $x+y$ est constante pour les carrés d'une même file. D'ailleurs, si k est le rang de la file, on a, pour le premier carré de cette file,

$$x = k, \qquad y = 1;$$

par suite,

$$x + y = k + 1. \tag{1}$$

En outre, lorsqu'on passe ainsi d'un carré au suivant, le numéro z augmentant aussi d'une unité, la différence $z-y$ est constante pour tous les carrés de la même file.

Appelons z_k le numéro du premier carré de la file k; nous aurons

$$z - y = z_k - 1.$$

On a d'ailleurs

$$z_1 = 1,$$
$$z_2 = z_1 + 1,$$
$$z_3 = z_2 + 2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$z_k = z_{k-1} + k - 1.$$

---

[1] Nous ne reproduisons pas l'énoncé, qui est fort long, et que l'on retrouvera à la page 426 du Tome précédent (Tome VI de la 3e série; 1887).

et, en additionnant,

$$z_k = 1 + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Donc

$$(2) \qquad z - y = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Les formules (1) et (2) donnent immédiatement z lorsqu'on connaît x et y. Ainsi, pour $x = 27$, $y = 41$, on a

$$k = 67,$$
$$z = 2252.$$

2° Pour résoudre la question inverse, il faut déterminer k lorsque z est connu. Or, si le carré numéroté z est dans la file de rang k, on a nécessairement

$$z_k \leq z < z_{k+1}$$

ou

$$1 + \frac{k(k-1)}{2} \leq z < 1 + \frac{(k+1)k}{2}$$

ou encore

$$k(k-1) \leq 2(z-1) < (k+1)k.$$

Or, les racines de l'équation

$$k^2 - k - 2(z-1) = 0$$

étant

$$\frac{1+\sqrt{1-8(z-1)}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{1-8(z-1)}}{2},$$

la première inégalité exige que

$$\frac{1-\sqrt{1-8(z-1)}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{1-8(z-1)}}{2}.$$

De même, si nous prenons les racines de l'équation

$$k^2 - k - 2(z-1) = 0.$$

nous voyons que la seconde inégalité entraîne

$$k < \frac{-1-\sqrt{1+8(z-1)}}{2}$$

ou

$$k > \frac{-1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2}.$$

L'examen de ces quatre inégalités montre qu'il faut que

$$\frac{-1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2} < k \leq \frac{1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2}.$$

Il est bien clair, d'après cela, que si $E(u)$ représente, suivant l'usage, le plus grand entier contenu dans la quantité u, on a

$$(3) \qquad k = E\left[\frac{1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2}\right].$$

Dès lors, quand on connaît z, les formules (1), (2) et (3) donnent x et y.

Ainsi, soit $z = 248$. On a, d'après (3),

$$k = E\left(\frac{1+\sqrt{1977}}{2}\right) = 22;$$

d'après (2),

$$y = 248 - \frac{22 \times 21}{2} = 17;$$

d'après (1),

$$x = 23 - 17 = 6.$$

3° Nous avons vu que, pour tous les carrés de la $k^{\text{ième}}$ file, la somme $x+y$ des coordonnées est égale à $k+1$. Elle est donc paire pour toutes les files de rang impair.

Cela posé, n étant le numéro du carré auquel on s'arrête, la formule (3) (où l'on remplace z par n) fait connaître le rang k de la file qui contient ce carré.

Soit $2\nu - 1$ *le plus grand nombre impair inférieur et* NON ÉGAL *à* k.

Les carrés pour lesquels $x + y$ est pair sont en nombre 1 dans la première file, 3 dans la troisième, ..., $2\nu - 1$ dans la $(2\nu - 1)^{\text{ième}}$, ce qui fait en tout

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2.$$

Si k est pair, c'est à cela que se borne le nombre cherché. Si k est impair, il faut ajouter le nombre de carrés de la file k jusqu'à celui numéroté n inclusivement, soit, avec les notations précédentes,

$$n - z_k + 1$$

ou

$$n - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Tous les cas possibles seront donc contenus dans la formule

$$\nu^2 + \frac{1 - (-1)^k}{2}\left[n - \frac{k(k-1)}{2}\right].$$

Par exemple, pour $n = 157$, on a

$$k = 18, \qquad \nu = 9.$$

Il y a donc 81 carrés pour lesquels la somme $x + y$ est paire parmi les 157 premiers carrés.

Pour $n = 180$, $k = 19$, $\nu = 9$. Ici, le nombre cherché est donc

$$81 + 180 - \frac{19 \times 18}{2} = 90.$$

Considérons maintenant le produit xy des coordonnées de chaque carré. Si l'une des coordonnées est paire, le produit est pair. Il en résulte que, dans chaque bande horizontale ou verticale correspondant à une coordonnée paire, tous les carrés donnent un produit xy pair. Si l'on couvre ces bandes de hachures, il saute aux yeux que, pour une file oblique de rang pair, tous les produits xy sont pairs, et que, dans une file de rang impair $2\mu + 1$, il y a μ carrés pour lesquels xy est pair. En outre, si z est le numéro d'un carré appartenant à une file de rang impair, il y a évidemment, depuis le premier carré de cette file (celui qui s'appuie sur OX) jusqu'au carré z inclusivement, autant de carrés à produit à xy pair qu'il y a d'unités dans

$$\frac{z - \frac{k(k-1)}{2}}{2}.$$

Cela posé, n étant le numéro du carré auquel on s'arrête, on détermine par la formule (3) le rang k de la file à laquelle appartient ce carré.

Supposons d'abord k pair.

Les $\mu - 1$ premières files de rang pair nous donnent d'abord

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2\mu - 2)$$

carrés à produit xy pair. Les $\mu - 1$ premières files de rang impair nous en donnent

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (\mu - 1).$$

Cela fait en tout

$$3\frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

En outre, tous les carrés de la file k comportant des produits xy pairs, il y a lieu d'ajouter encore

$$n - \frac{k(k-1)}{2}$$

carrés.

Ainsi, pour $k = 2\mu$, nous avons

$$3\,\frac{\mu(\mu-1)}{2} + n - \frac{k(k-1)}{2}$$

carrés répondant à la question.

Maintenant, pour $k = 2\mu + 1$, nous avons encore les $\frac{3\mu(\mu-1)}{2}$ premiers carrés. Nous avons en outre les 2μ carrés de la file 2μ ou $k-1$ et, d'après une remarque faite plus haut, et en représentant toujours par $\mathrm{E}(u)$ la partie entière de u,

$$\mathrm{E}\left[\frac{n - \frac{k(k-1)}{2}}{2}\right]$$

carrés de la file de rang k.

Cela fait en tout

$$3\,\frac{\mu(\mu-1)}{2} + k - 1 + \mathrm{E}\left[\frac{n - \frac{k(k-1)}{2}}{2}\right].$$

Les deux cas peuvent être fondus en une même formule que voici :

$$\begin{aligned}&\frac{3\,\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)\left[\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)-1\right]}{2}\\ &+\frac{1+(-1)^k}{2}\left[n-\frac{k(k-1)}{2}\right]\\ &+\frac{1-(-1)^k}{2}\left\{k-1+\mathrm{E}\left[\frac{n-\frac{k(k-1)}{2}}{2}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Pour $n = 157$, $k = 18$, et l'on a

$$\frac{3\times 9\times 8}{2} + 157 - \frac{18\times 17}{2} = 112$$

carrés à produit xy pair.

Pour $n = 180$, $k = 19$, $E\left[\dfrac{n - \dfrac{k(k-1)}{2}}{2}\right] = 4$; on a donc

$$\frac{3 \times 9 \times 8}{2} - 18 + 4 = 130$$

carrés à produit xy pair.

4° L'expression

$$ax + (a+2)y - 2z$$

peut, en vertu des formules (1) et (2), s'écrire

$$a(k+1) - k(k-1).$$

Elle a donc la même valeur pour tous les carrés d'une même file. Reste à trouver le rang de la file pour laquelle elle a la plus grande valeur. A cet effet, écrivons-la

$$-k^2 + (a+1)k + a.$$

Le maximum de ce trinôme du second degré a lieu, d'après une propriété bien connue, pour

$$k = \frac{a+1}{2}.$$

Si cette valeur est entière, elle répond à la question; sinon, on essaye les deux nombres entiers consécutifs qui la comprennent, et l'on prend celui des deux qui, substitué dans le trinôme, donne le résultat le plus élevé. Ainsi, pour $a = 9$, $k = 5$.

Pour $a = 10$, essayons $k = 5$ et $k = 6$. Les substitutions de ces deux valeurs donnent

$$-25 + (11 \times 5) + 10 = 40,$$
$$-36 + (11 \times 6) + 10 = 40.$$

On peut donc indifféremment choisir l'une ou l'autre.

Pour $a = 9,5$, essayons encore $k = 5$ et $k = 6$. Nous avons

$$-25 + (10,5 \times 5) + 9,5 = 37,$$
$$-36 + (10,5 \times 6) + 9,5 = 36,5.$$

Ici, il faut donc prendre $k = 5$.

Remarque. — Les trois premières parties du problème peuvent être présentées sous cet énoncé :

On considère un polynôme indéfini en α et β, ne contenant pas les puissances séparées des variables, et ordonné de la manière suivante :

$$C_{11}\alpha\beta + C_{21}\alpha^2\beta + C_{12}\alpha\beta^2 + C_{31}\alpha^3\beta + C_{22}\alpha^2\beta^2 + C_{13}\alpha\beta^3 + \ldots.$$

1° *Étant donnés les exposants de α et β dans un terme, trouver le rang de ce terme ;*

2° *Étant donné le rang, trouver les exposants ;*

3° *Combien y a-t-il de termes dont le degré total est pair, combien dont l'un des exposants est pair parmi les n premiers termes ?*