NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de la question 1572

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 442-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__442_1>

SOLUTIONS DE LA QUESTION 1572;

TP et TQ sont des tangentes à une parabole de foyer S; *la droite* TS *rencontre le cercle* TPQ *en un point* L; *prouver, par la Géométrie pure, que* TS = SL.

(R.-W. GENÈSE.)

1. *Solution de M. d'Ocagne.*

Considérons les cercles tangents en T, l'un à TP, l'autre à TQ, et passant respectivement par les points Q et P. En appelant S le point où se coupent ces deux cercles, j'ai démontré dans une de mes Notes sur la symmédiane (*Nouvelles Annales*, p. 366; 1885) que la droite TS, symmédiane du triangle TPQ, coupe le cercle circonscrit à ce triangle en un point L, tel que TS = SL. Il suffit donc, pour que la proposition précédente soit démontrée, de faire voir que le point S est le foyer de la parabole tangente respectivement en P et en Q à TP et à TQ. A cet effet, tirons la médiane TM du triangle TPQ; c'est un diamètre de la parabole. D'ailleurs, on a $\widehat{QTM} = \widehat{STP}$; c'est la définition même de la symmédiane. Mais, dans le cercle TSQ, on voit que les angles STP et SQT sont égaux comme ayant même mesure. Donc $\widehat{QTM} = \widehat{SQT}$. De même $\widehat{PTM} = \widehat{SPT}$. Le point S est donc bien le foyer de la parabole.

2. *Solution de M. Ignacio Beyens,*

Capitaine du Génie à Cadix.

Soient

SX l'axe de la parabole;
PP', QQ' des parallèles à l'axe;
p, q les milieux de TP, TQ.

D'après les propriétés bien connues de la parabole, on aura

$$\text{angle TPS} = \text{HPP}' = \text{HTT}' = \text{STQ}$$

et

$$\text{angle STP} = \text{T}'\text{TQ} = \text{Q}'\text{QK} = \text{SQT}.$$

Donc les triangles STP $\equiv$ STQ sont semblables et les médianes Sp, Sq divisent ces triangles en deux autres aussi semblables, et, par suite, nous aurons

$$p\text{S}q = p\text{ST} + \text{TS}q = q\text{SQ} + p\text{SP};$$

mais

$$qSQ = \pi - SqQ - SQT = \pi - SqQ - STP$$

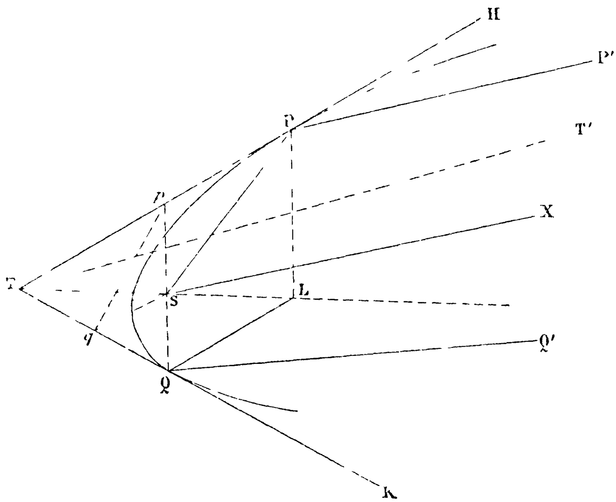
et

$$pSP = \pi - SpP - TPS = \pi - SpP - STQ\,;$$

d'où

$$pSq = TqS + TpS - pTq,$$
$$pSq + pTq = TqS + TpS.$$

Le quadrilatère $TpSq$ est donc inscriptible et le sera



aussi le quadrilatère TPLQ, formé en menant par P, Q des parallèles à Sp, Sq; mais alors SL = ST : donc le cercle TPQ coupe la droite TS en un point L tel que SL = ST. C. Q. F. D.

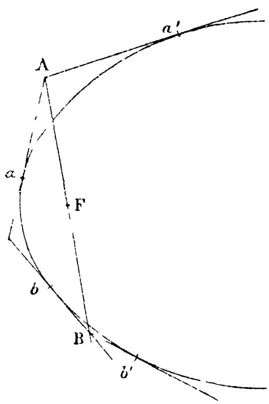
3. *Solution de M. J. Bernard,*

Élève de l'École Normale supérieure.

Le théorème de M. R.-W. Genèse peut être complété, et il fournit alors une intéressante proposition dont voici l'énoncé et la démonstration :

Étant donnée une parabole, si l'on prend deux points A *et* B (*fig.* 1) *symétriques par rapport au*

Fig. 1.



foyer F, *ces deux points, ainsi que les quatre points de contact des tangentes menées de* A *et de* B *à la parabole, sont sur un même cercle.*

Je transforme toute la figure par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre F et de rayon arbitraire. Il suffit alors de démontrer le théorème suivant :

Étant donnés un cercle ω, *un point* F *dessus et deux droites* (α) *et* (β) *parallèles,* équidistantes *de* F, *ces deux droites, ainsi que les quatre tangentes au cercle aux quatre points où* (α) *et* (β) *le rencontrent, sont tangentes à une même conique de foyer* F.

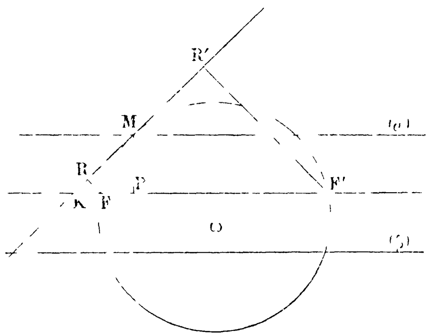
Menons par F (*fig.* 2) la parallèle à (α) et (β) : elle détermine sur ω un second point F'. Abaissons de M la perpendiculaire MP sur FF', puis projetons F et F' en R et R' sur la tangente en M.

Je dis que

$$\overline{FR}.\overline{F'R'} = \overline{MP}^2.$$

Soit K le point d'intersection de RR' et de FF'.

Fig. 2.



Les triangles semblables

$$\begin{cases} KRF, \\ KPM, \end{cases} \qquad \begin{cases} KR'F', \\ KPM \end{cases}$$

donnent

$$\frac{FR}{MP} = \frac{KF}{KM}, \qquad \frac{F'R'}{MP} = \frac{KF'}{KM}.$$

Multipliant membre à membre, j'obtiens

$$\overline{FR}.\overline{F'R'} = \overline{MP}^2.$$

En considérant la tangente en N, on aurait un résultat analogue.

Donc les droites (α) et (β), les tangentes en M et en N et, par raison de symétrie, les tangentes en M' et en N' enveloppent une conique de foyers F et F'.

Le théorème se trouve donc démontré.

On en déduit immédiatement quelques conséquences intéressantes.

Ainsi, considérons une ellipse fixe et tous les cercles qui passent par les deux foyers F et F'.

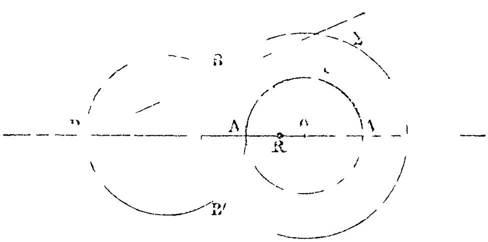
Menons les tangentes communes à l'ellipse et à un des cercles de la série. Les points de contact de ces tangentes avec le cercle sont sur les tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe.

Ce théorème faisait partie du problème posé en 1885 aux candidats à l'Ecole Polytechnique.

On peut en déduire le théorème suivant :

Soient Σ *et* S *deux cercles concentriques de rayons a et c $(a > c)$ et un diamètre fixe* OP. *Prenons sur ce diamètre un point variable* P *et décrivons sur* PA

Fig. 3



comme diamètre un cercle qui coupe le cercle Σ *en* B *et* B'. *Joignons* PB *et prenons le point* R *conjugué harmonique de* P *par rapport à* A *et* A'. *La distance de* R *à la droite* PB *est constante et égale à* $\sqrt{a^2 - c^2}$.