Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 438-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__438_1>

DÉTERMINATION DU RAYON DE COURBURE DE LA COURBE INTÉGRALE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Si une courbe K, rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy, a pour équation

$$y = \varphi(x),$$

on appelle *courbe intégrale* de celle-ci une courbe ayant pour équation

$$y = \int \varphi(x)\,dx + C,$$

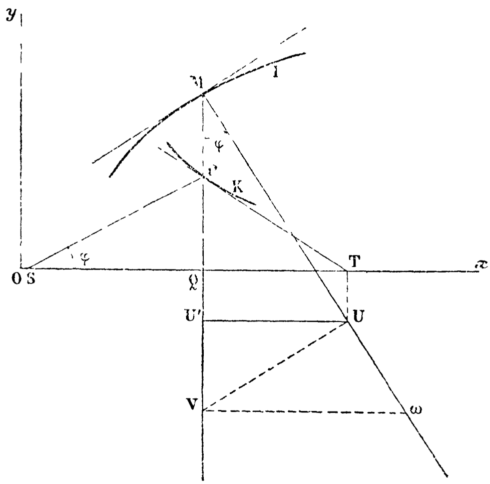
C étant une constante arbitraire. Appelons I cette courbe intégrale. On voit que sa propriété fondamentale consiste en ce que *la différence entre deux quelconques de ses coordonnées est égale à l'aire comprise entre ces coordonnées, la courbe* X *et l'axe des* x.

Cette courbe est de la plus haute importance au point de vue du calcul graphique (¹).

(¹) Consulter à cet égard l'intéressant Ouvrage intitulé : *Les intégraphes. La courbe integrale et ses applications* (Paris, Gauthier-Villars et Fils), par M. Abdank-Abakanowicz, inventeur d'ingénieux appareils permettant de tracer mécaniquement la courbe intégrale d'une courbe quelconque dessinée sur un plan.

Si l'on mène par le point P de la courbe K (*fig.* 1) une parallèle à la tangente menée à la courbe I par le point M correspondant, on voit que QS est, à l'échelle

Fig. 1.



de la figure, égale à l'unité. Nous désignerons cette longueur QS, égale à l'unité, par la lettre l.

Soient, en outre :

Y l'ordonnée MQ;
y l'ordonnée PQ;
φ l'angle de la tangente en M à la courbe I avec Ox;
ds l'arc infiniment petit de la courbe I au point M;
ρ le rayon de courbure $M\omega$ de la courbe I au même point.

On a

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}. \tag{1}$$

Or

$$ds = \sqrt{dx^2 + dY^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$= \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}\, dx = \frac{\sqrt{l^2 + y^2}}{l}\, dx.$$

D'autre part, puisque

$$\varphi = \text{arc tang}\, \frac{y}{l},$$

on a

$$d\varphi = \frac{l\, dy}{l^2 + y^2}.$$

La formule (1) devient donc

$$\rho = \frac{\sqrt{l^2 + y^2}\,(l^2 + y^2)\, dx}{l^2\, dy}$$

ou

$$M\omega = \frac{\overline{PS}^3}{\overline{QS}^2}\, \frac{dx}{dy},$$

ou encore, si PT est la tangente en P à la courbe K,

$$M\omega = \frac{\overline{PS}^3}{\overline{QS}^2}\, \frac{QT}{PQ}.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure cherché en fonction des lignes données sur la figure. Cette formule peut être grandement simplifiée en vue de la construction géométrique du centre de courbure ω. En effet, elle peut s'écrire, en remarquant que $\frac{QS}{PS} = \cos\varphi$,

$$M\omega \cos^2\varphi = PS\, \frac{QT}{PQ},$$

ou, en tirant ωV perpendiculaire à MQ et VU perpendiculaire à $M\omega$,

$$MU = \frac{QT}{\sin\varphi},$$

ou encore, en abaissant de U la perpendiculaire UU′ sur MQ,

$$UU' = QT.$$

Cette égalité montre que TU est perpendiculaire à Ox.

La construction par laquelle le centre de courbure de la courbe I se déduit de la tangente à la courbe K, construction indiquée par les lignes pointillées, est donc la suivante :

Par le point T *où la tangente à la courbe* K *coupe l'axe* Ox, *élever une perpendiculaire à cet axe jusqu'à sa rencontre, en* U, *avec la normale à la courbe* I; *par le point* U *élever une perpendiculaire à la normale* MU *jusqu'à sa rencontre, en* V, *avec l'ordonnée correspondante; enfin par le point* V *élever à l'ordonnée* MV *une perpendiculaire qui, par sa rencontre avec la normale* MU, *donne le centre de courbure* ω *cherché.*

La construction se réduit donc au tracé des trois perpendiculaires TU à Ox, UV à MU, $V\omega$ à MV.

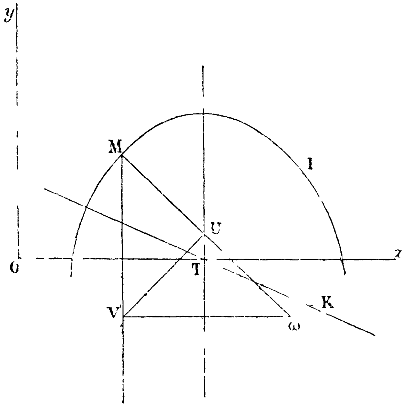
Examinons le cas où la courbe K est une droite (*fig.* 2). La courbe intégrale I est alors une parabole ayant pour axe la perpendiculaire élevée à Ox par le point T où cette droite rencontre la droite K.

L'application de la règle précédente montre que : *si* U *est le point où la normale en* M *à la parabole coupe l'axe de cette courbe, le centre de courbure* ω *répondant au point* M *s'obtient en élevant en* U *une perpendiculaire à la normale* MU *jusqu'à sa rencontre* V *avec le diamètre du point* M, *et élevant en* V *à* MV *la perpendiculaire*

V ω *qui coupe la normale* MU *au centre de courbure* ω.

C'est précisément l'application au cas de la parabole,

Fig. 3



considérée comme une ellipse limite, de la construction du centre de courbure de cette dernière courbe donnée par M. Mannheim.