NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAX GENTY

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 436-438

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__436_0>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. MAX. GENTY.

THÉORÈME. — *Le produit du paramètre de distribution des plans tangents, relatif à une génératrice d'un hyperboloïde par le carré de la distance du centre de l'hyperboloïde à cette génératrice est constant et égal au produit des demi-axes de la surface.*

Considérons un hyperboloïde de centre ω. Du point ω abaissons une perpendiculaire ωo sur l'une des génératrices de cet hyperboloïde. Prenons maintenant le point o pour origine des coordonnées, la génératrice considérée pour axe des z, la droite $o\omega$ pour axe des x et une perpendiculaire menée par le point o au plan xoz pour axe des y.

L'équation de la surface est alors, en désignant par D la distance $o\omega$,

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B''xy - 2D(Ax + B''y) = 0.$$

L'expression d'une droite infiniment voisine de $\overline{oz}$ a pour équation

$$x = az + x_1,$$
$$y = bz + y_1,$$

a et b étant des infiniment petits et x_1, y_1 étant les coordonnées du point où cette droite perce le plan des xy.

Exprimons que cette droite est sur l'hyperboloïde. Pour cela, formons l'équation aux z des points d'intersection de la droite et de la surface et exprimons, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, que cette équation est indéterminée.

Nous avons ainsi les trois conditions

$$b = 0, \qquad By_1 - D(Aa + B''b) = 0, \qquad Ax_1 + B''y_1 = 0.$$

Les équations de la génératrice de l'hyperboloïde infiniment voisine de $\overline{oz}$ sont donc

$$\begin{cases} x = az + x_1, \\ y = y_1, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(1) \qquad By_1 - DAa = 0, \qquad Ax_1 + B''y_1 = 0.$$

Ceci posé, l'angle φ des deux génératrices infiniment voisines a pour valeur a aux infiniment petits du second ordre près; et la plus courte distance de ces deux droites est à la même approximation y_1.

Par conséquent, le paramètre de distribution p des plans tangents de l'hyperboloïde relatif à la génératrice oz a pour valeur $\frac{y_1}{a}$, c'est-à-dire, en tenant compte des relations (1),

$$p = D\frac{A}{B}.$$

Or soient a, b, c les demi-axes de la surface. Nous avons

$$a^2b^2c^2 = \frac{\Theta^3}{\Delta},$$

Θ étant le résultat de la substitution des coordonnées du centre de l'hyperboloïde dans le premier membre de son équation, et Δ étant le discriminant de la partie homogène de cette équation. On a donc

$$\Delta = -AB^2, \qquad \Theta = -AD^2.$$

et, par suite,

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{A^3 D^6}{AB^2} = \frac{A^2 D^6}{B^2},$$

$$abc = \frac{AD^3}{B},$$

et, comme nous avons vu que $p = \frac{DA}{B}$, nous voyons que le produit pD^2 est constant et égal à abc.