Nouvelles annales de mathématiques

MARCHAND

Discussion de l'équation en S

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 431-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__431_0>

DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S;

PAR M. MARCHAND.

Soit $F(s) = 0$ l'équation donnée

$$(1) \qquad F(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix}.$$

Je trouve dans le *Traité d'Analyse* de M. Laurent (t. I, p. 240) :

« Si $F = 0$ a une racine double, tous les mineurs de F sont nuls, et réciproquement d'ailleurs, car alors $F'(s)$ sera nul.

» Je dis que, en général, si $F(s)$ a une racine d'ordre de multiplicité h, tous les mineurs d'ordre $h - 1$ de $F(s)$ sont nuls. »

La réciproque est encore vraie : si tous les mineurs d'ordre $h - 1$ sont nuls, sans que tous ceux d'ordre h le soient, la racine est multiple d'ordre h. C'est ce que je me propose d'établir ici en développant les conséquences de la méthode de Sylvester. Je ne reviendrai pas d'ailleurs sur la partie connue de la démonstration, qui établit l'impossibilité de l'existence de racines imaginaires.

Le calcul repose sur ce que le produit $F(s)\,F(-s)$ prend une forme très remarquable

$$(2) \quad F(s)\,F(-s) = \begin{vmatrix} A_{11} - s^2 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - s^2 & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - s^2 \end{vmatrix},$$

$$A_{hk} = a_{h1}a_{k1} + a_{h2}a_{k2} + \dots + a_{hn}a_{kn}.$$

Je dis que le coefficient de $(-s^2)^p$ sera la somme des carrés de tous les mineurs d'ordre p du déterminant

$$(3)\qquad \Delta = F(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En effet ce coefficient sera la somme de tous les mineurs de

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

obtenus en supprimant p *lignes quelconques* et les p colonnes ayant respectivement les mêmes indices que ces p lignes.

Considérons en particulier un de ces mineurs de (4) : ses éléments se déduiront de ceux que l'on obtiendrait en formant le produit complet des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en laissant de côté les p *lignes quelconques* choisies, dans chacun des deux déterminants Δ qu'on combinerait ligne à ligne pour avoir le produit. D'après le théorème général de Binet et Cauchy, il restera un déterminant égal à la somme des carrés des mineurs de Δ que l'on peut former après suppression des p lignes considérées.

Si donc je désigne par Δ le déterminant (3), par Δ_1 un quelconque de ses mineurs du premier ordre, par Δ_2 un quelconque de ses mineurs du second ordre, etc., j'aurai

$$(5)\qquad F(s)F(-s) = \Delta^2 - s^2\sum \Delta_1^2 + s^4\sum \Delta_2^2 - s^6\sum \Delta_3^2 - \dots.$$

Le déterminant (1) est de même forme que le déterminant (3); on a $a_{11}-s$, au lieu de a_{11}, ...

Alors, au lieu de (5), je puis écrire

$$(6)\qquad F(s+\varepsilon)F(s-\varepsilon)=\Delta^2-\varepsilon^2\Sigma\,\Delta_1^2+\varepsilon^4\Sigma\,\Delta_2^4-\ldots.$$

Dans (6) Δ représente $F(s)$, Δ_1 un mineur du premier ordre de $F(s)$, ...

D'autre part, la formule de Taylor donne aussitôt

$$F(s+\varepsilon)=F(s)+\varepsilon F_1(s)+\varepsilon^2F_2(s)+\ldots,$$
$$F(s-\varepsilon)=F(s)-\varepsilon F_1(s)+\varepsilon^2F_2(s)-\ldots,$$
$$F_p(s)=\frac{F^{p)}(s)}{1.2\ldots p}.$$

On obtient cette nouvelle identité

$$(7)\qquad F(s+\varepsilon)F(s-\varepsilon)=\Sigma\,\varepsilon^{2p}(F_{2p}F-F_{2p-1}F_1+\ldots+FF_{2p}).$$

Identifiant les polynômes (6) et (7) en ε^2, on a les résultats qu'il s'agissait d'obtenir

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} F^2=\Delta^2,\\ 2FF_2-F_1^2=-\Sigma\,\Delta_1^2,\\ 2FF_4-2F_1F_3+F_2^2=\Sigma\,\Delta_2^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 2FF_{2p}-2F_1F_{2p-1}+\ldots+(-1)^pF_p^2=(-1)^p\Sigma\,\Delta_p^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

La conclusion est dès lors évidente.

Si

$$F=F_1=F_2=\ldots=F_{p-1}=0,\qquad F_p\neq 0,$$

il en résulte

$$\Delta^2=0,\qquad \Sigma\,\Delta_1^2=0,\qquad \ldots,\qquad \Sigma\,\Delta_{p-1}^2=0,$$
$$\Sigma\,\Delta_p^2=(-1)^pF_p^2\neq 0.$$

Pour une racine d'ordre p, tous les mineurs jusqu'à l'ordre $p-1$ inclusivement sont nuls; les mineurs d'ordre p ne sont pas tous nuls.

Chaque hypothèse différente sur le degré de multiplicité de la racine de l'équation en s conduisant à des conclusions différentes, on peut dire réciproquement que, si tous les mineurs sont nuls jusqu'à l'ordre p exclusivement, la racine est d'ordre p de multiplicité.

Cas particulier. — Si l'on prend l'équation ordinaire

$$(1\ bis)\qquad F(s) = \begin{vmatrix} A-s & B'' & B' \\ B'' & A'-s & B \\ B' & B & A''-s \end{vmatrix} = 0,$$

les relations (8) se réduisent à deux égalités faciles à vérifier directement

$$(8\ bis)\qquad \left\{ \begin{aligned} F_1^2 - 2FF_2 &= \Sigma\,\Delta_1^2, \\ F_2^2 - 2F_1F_3 &= \Sigma\,\Delta_2^2. \end{aligned} \right.$$

La première se déduit facilement de l'identité utilisée par M. Laurent (t. I, p. 239)

$$F\,\frac{\partial^2 F}{\partial(a_{11}-s)\,\partial(a_{ii}-s)} = \frac{\partial F}{\partial(a_{11}-s)}\,\frac{\partial F}{\partial(a_{ii}-s)} - \left(\frac{\partial F}{\partial a_{1i}}\right)^2.$$

La deuxième ne diffère pas essentiellement de l'identité connue par laquelle on prouve qu'il est impossible que l'on ait simultanément

$$A + A' + A'' = 0, \qquad A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2 = 0.$$

Dans le cas particulier, considéré ici, le théorème de Rolle est d'application facile

$$F_3 = -1, \qquad F_2 = A - s + A' - s + A'' - s.$$

La dérivée seconde F_2 admet donc la racine

$$s_1 = \frac{A + A' + A''}{3}.$$

Pour $-\infty$ et $+\infty$ la dérivée première a le signe $-$.

Comme

$$F_2^2 + 2F_1 = 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 + (A - S)^2 + (A' - S)^2 + (A'' - S)^2,$$

la racine s_1 de F_2 donnera le signe $+$ pour F_1, excepté si

$$B = B' = B'' = A - S = A' - S = A'' - S = 0.$$

Donc, sauf dans le cas de la sphère, qui se traite comme on sait directement, on a

$$\begin{array}{ccc} F_1(-\infty), & F_1(s_1), & F_1(-\infty). \\ & - & \end{array}$$

La dérivée F_1 a donc deux racines $s_2 < s_3$ différentes, sauf pour le cas de la sphère.

Comme

$$F_1^2 - 2FF_2 = \Sigma\Delta_1^2$$

on a

$$F(s_2)F_2(s_2) \quad 0,$$
$$F(s_3)F_2(s_3) \quad 0$$

d'où

$$F(s_2) < 0$$
$$F(s_3) > 0$$

Alors, d'après le théorème de Rolle, toutes les racines sont réelles, car on a

$$\begin{array}{cccc} F(-\infty), & F(s_2), & F(s_3), & F(\infty). \\ - & - & + & - \end{array}$$

Le raisonnement n'est en défaut que si $\Sigma\Delta_1^2$ s'annule pour s_2 ou pour s_3. Mais alors $F = F_1 = 0$; on a une racine double et l'on trouve les conditions générales suffisantes et nécessaires pour qu'il en soit ainsi : $\Sigma\Delta_1^2 = 0$.