NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

Sur une forme du déterminant de Vandermonde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 427-429

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__427_1>

SUR UNE FORME DU DÉTERMINANT DE VANDERMONDE;

PAR M. WEILL.

$a, b, c, \ldots l$, étant des quantités distinctes, la fraction $\frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}$ peut se mettre sous la forme $\sum \frac{A}{x-a}$; les quantités A, B, ..., L seront données par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A + B + \ldots + L = 0, \\ AS_1^a + BS_1^b + \ldots + LS_1^l = 0, \\ AS_2^a + BS_2^b + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

en désignant par S_p^a la somme des produits p à p de toutes les quantités a, b, c, ... l, sauf a, et ainsi des autres.

Les équations (1) étant toujours possibles, leur déterminant n'est pas nul; or ce déterminant, qui est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ S_1^a & S_1^b & & . & \ldots & S_1^l \\ S_2^a & S_2^b & . & . & \ldots & .. \\ .. & .. & . & . & \ldots & .. \end{vmatrix},$$

s'annule quand deux quelconques des quantités a, b, c, ... deviennent égales, et il est, par rapport aux lettres, de même degré que le déterminant de Vandermonde; donc il n'en diffère que par un facteur numérique, qui est, comme on le voit facilement, $(+1)$, si le nombre des quantités est pair, et (-1) si ce nombre est impair. On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & c+d+a & d+a+b & a+b+c \\ bc+cd-db & cd+da+ac & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ bcd & cda & dab & abc \end{vmatrix}.$$

En résolvant le système (1) par rapport à A, on en conclut qu'un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ S_1^b & S_1^c & \ldots & S_1^l \\ S_2^b & S_2^c & \ldots & S_2^l \\ .. & .. & \ldots & .. \end{vmatrix}$$

est indépendant de a; il suffit, pour le voir, d'égaler entre elles les deux valeurs de A obtenues l'une directement, et l'autre, en résolvant le système (1).