NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 401-407

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__401_0>

REMARQUES SUR DIVERS ARTICLES, CONCERNANT LA THÉORIE DES SÉRIES;

PAR M. E. CESARO.

1. M. Mathyas Lerch a signalé des séries qui se prêtent à des considérations intéressantes. C'est spécialement la série dont le terme général est

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \qquad (0 < q < 1 < x),$$

que M. Lerch a fait connaître dans le *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, vol. VII, p. 79. On a représenté par ν le *nombre des chiffres* de n. Le nombre $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, généralement égal à q, devient x^ν lorsque $n = 10^{\nu-1}$. Il en résulte que, si l'on fait parcourir à n la succession des puissances de 10, le rapport considéré finit par surpasser toute limite. Cependant *la série est convergente*, car $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $q < 1$. M. Lerch dit, en outre, que x doit être inférieur à $\frac{1}{q^2}$. Curieux de *savoir le pourquoi* de cette condition inutile, j'ai été conduit à penser que M. Lerch, voulant se borner à faire connaître quelque exemple particulier de séries construites avec une grande généralité, a involontairement échangé entre elles les conditions relatives à deux cas particuliers différents. Soit $f(n)$ une fonction telle que $f(n) - f(n-1)$ augmente avec n au delà de toute limite. Si $\mathfrak{I}(n)$ est la totalité des nombres entiers, non supérieurs à n, qui jouissent d'une propriété Ω, appartenant à une infinité de nombres entiers, la série dont le terme général est

$$u_n = q^n x^{f[\mathfrak{I}(n)]} \qquad (0 < q < 1 < x)$$

est certainement convergente, si $\frac{f[\mathfrak{I}(n)]}{n}$ tend vers zéro, bien que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des nombres entiers doués de la propriété Ω. La série est encore convergente lorsque $\frac{f[\mathfrak{I}(n)]}{n}$ tend vers une limite finie autre que zéro; mais, dans ce cas, x ne peut être aussi grand qu'on le veut. En particulier, la série, dont le terme général est

$$u_n = q^n x^{[\sqrt{n}]^2} \qquad \left(0 < q < 1 < x < \frac{1}{q}\right),$$

est convergente, bien que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des *carrés parfaits*. C'est probablement cette série que M. Lerch avait en vue, ou plutôt la série qui a pour terme général

$$u_n = q^{n-[\sqrt{n}]} x^{\frac{1}{2}[\sqrt{n}]\{[\sqrt{n}]+1\}}.$$

Quoi qu'il en soit, il est certain que, si la propriété Ω cessait d'être *infiniment rare* parmi les nombres entiers, la série perdrait sa convergence.

2. J'ai donné dans le même *Journal*, vol. VII, p. 172, des exemples moins compliqués. Les voici :

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \ldots \qquad (1 < \alpha < \beta),$$

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 - \ldots \qquad (0 < \alpha < \beta < 1).$$

M. A. Gutzmer dit que ces exemples sont *moins remarquables* que celui de M. Lerch. Cette appréciation est inexacte. Voici pourquoi. Dans la série de M. Lerch, les valeurs de n, qui font croître $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ au delà de toute limite, *deviennent de plus en plus rares*. Dans mes exemples, comme dans d'autres séries de M. Lerch, il est tout aussi probable de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tendre vers l'infini que vers zéro. C'est justement sur cette observation que M. Gutzmer s'appuie pour dire que la série de M. Lerch est la plus remarquable de toutes. Or il me semble que *la convergence d'une série est d'autant plus surprenante que les symptômes de divergence s'y manifestent plus fréquemment*. On devrait plutôt s'attacher à multiplier ces symptômes autant que possible, en s'efforçant d'obtenir, malgré cela, une série convergente. Il est certain qu'on peut construire des séries dans lesquelles $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite pour des valeurs de n, dont la fréquence parmi les nombres entiers est aussi considérable qu'on le veut. Il suffit de prendre la série

$$q_1 + q_2^2 + \ldots + q_r^r + q_1^{r+1} + q_2^{r+2} + \ldots + q_r^{2r} + q_1^{2r+1} + \ldots,$$

où

$$0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_r < 1.$$

Ici la convergence est manifeste. Cependant, la probabilité de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasser toute limite est $1 - \frac{1}{r}$: elle est aussi voisine de l'unité qu'on le veut. Est-il possible de *construire des séries convergentes dans lesquelles les valeurs de n, qui ne font pas croître $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ à l'infini, soient infiniment rares?*

3. Dans le *Jornal de Sciencias*, vol. VIII, p. 33, M. Gutzmer a montré que les singularités de la série de M. Lerch peuvent être *enlevées* par un groupement convenable des termes. Ce fait est vrai pour toutes les

séries convergentes. J'ai établi cela en faisant voir, par des considérations analogues à celles dont on fait usage pour démontrer le *théorème de Riemann,* comment on doit s'y prendre pour *calquer,* pour ainsi dire, une série convergente sur une progression géométrique donnée. Mais M. Ed. Weyr, dans le même *Journal,* vol. VIII, p. 97, vient d'arriver au même résultat par des considérations beaucoup plus simples que les miennes. Je vais les reproduire en les modifiant quelque peu. Soit

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

une série convergente à termes positifs. Le rapport $\frac{S_n}{R_n}$ croît à l'infini avec n, et, par suite, on peut toujours assigner une valeur de n à partir de laquelle on ait constamment $qS_n > R_n$, q étant positif. Cela est encore vrai, si l'on considère la série à partir de l'un quelconque de ses termes. Il en résulte qu'on peut grouper les termes de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, en les laissant dans l'ordre où ils se trouvent, de manière à former une nouvelle série $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, dont les termes satisfont à l'inégalité $qv_n > v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots$. On voit que $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ sera constamment inférieur au nombre positif q, arbitrairement petit. Plus généralement, ayant pris des nombres quelconques, positifs et finis, la remarque de M. Weyr conduit à affirmer qu'il existe une suite de nombre positifs $q_1, q_2, q_3, \ldots$ non supérieurs aux nombres donnés, et tels que l'on puisse écrire

$$v_n = \frac{S q_1 q_2 q_3 \ldots q_{n-1}}{(1+q_1)(1+q_2)\ldots(1+q_n)}.$$

Au moyen de cette égalité, nous pouvons faire en sorte que l'*allure* de la série donnée se modèle, autant que possible, sur celle d'une autre série.

4. On a reproduit dans le même *Journal*, vol. VIII, p. 116, quelques-unes de mes précédentes remarques (*Nouvelles Annales*, p. 50; 1880). A propos de l'une d'elles, je signalerai une généralisation assez intéressante. Si la fonction a_n croît sans cesse et indéfiniment, on sait, d'après Cauchy, que l'on a

$$\lim \frac{a_1 S_1 + (a_2 - a_1) S_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1}) S_n}{a_n} = S$$

ou bien

$$\lim \left(S_n - \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \ldots + a_{n-1} u_n}{a_n} \right) = S$$

d'où

$$\lim \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \ldots + a_{n-1} u_n}{a_n} = 0.$$

D'autre part, en vertu du même théorème de Cauchy,

$$\lim \frac{a_1 u_1 + (a_2 - a_1) u_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1}) u_n}{a_n} = 0,$$

car $\lim u_n = 0$. Donc

$$\lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{a_n} = 0.$$

Voici une curieuse conséquence de cette égalité. Si la série $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$ n'est pas *moins divergente* que la série harmonique, on peut substituer n au dénominateur a_n. Si l'on prend ensuite $a_n u_n = \pm 1$, on arrive à cette conclusion : *pour que la série*

$$\pm \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} \pm \frac{1}{a_3} \pm \ldots$$

soit convergente, il faut que les signes — s'y présentent aussi fréquemment que les signes +. Cela généralise une proposition énoncée précédemment (*Nouvelles Annales*, p. 57; 1888).

5. Il vient de paraître dans les *Nouvelles Annales*, p. 196, 1888, un théorème de convergence que son auteur, M. J.-L.-W.-V. Jensen, croit nouveau. On a l'habitude d'énoncer la première partie du *théorème de Kummer* comme il suit : *Soit a_n une fonction positive de n. La série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, à termes positifs, est convergente si $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ tend, pour n infini, vers une limite positive.* Cet énoncé a le défaut d'être plus restrictif que ne l'exige la démonstration; car, dans celle-ci, on commence par admettre l'existence d'une limite positive λ pour $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ dans le seul but d'en conclure que cette expression finit par surpasser tout nombre *positif* k inférieur à λ. M. Jensen a donc raison d'énoncer le théorème de Kummer comme il le fait, mais on ne saurait accorder à son article des *Nouvelles Annales* d'autre valeur que celle d'une utile remarque. Voici comment je démontre dans mon *Cours*, depuis deux ans, le théorème en question. L'inégalité

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > k u_{n+1},$$

qui a lieu à partir d'une valeur de n, montre d'abord que la fonction *positive* $a_n u_n$ finit par décroître. Donc $a_n u_n$ admet une limite finie, et, par suite, la série

$$(a_1 u_1 - a_2 u_2) + (a_2 u_2 - a_3 u_3) + (a_3 u_3 - a_4 u_4) + \ldots$$

est *convergente*. La série donnée converge donc aussi, puisque ses termes, multipliés par la constante k, finissent par être inférieurs aux termes correspondants d'une série convergente *à termes positifs*. Quant à la seconde partie du théorème, j'observe que, si l'expression considérée devient négative à partir d'une certaine valeur de n, la fonction $a_n u_n$ croît au-dessus de quelque nombre positif k. Il en résulte que la série donnée est divergente, puisque ses termes finissent par surpasser les termes correspondants de la série $\frac{k}{a_1} + \frac{k}{a_2} + \frac{k}{a_3} + \cdots$, *qu'on suppose divergente.*