M. ROUX

Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 384-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__384_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888;

PAR M. M. ROUX,
Élève de l'École Polytechnique.

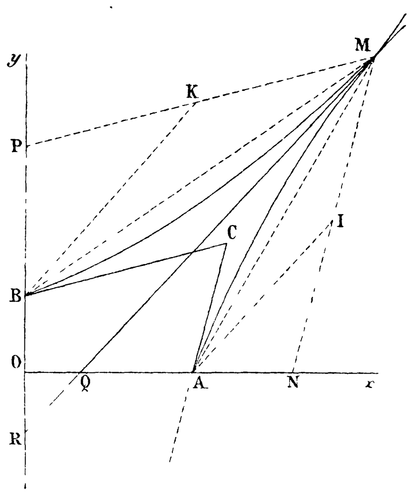
Pour simplifier les figures, nous traiterons le problème dans le cas où les axes sont rectangulaires; pour obtenir les résultats dans le cas général, il nous suffira de projeter sur un plan quelconque.

PREMIÈRE PARTIE.

Soient (*fig.* 1) deux paraboles tangentes au point M, MQR la tangente commune à ces deux paraboles; par le point M menons une parallèle MN à AC : elle rencontre Ox en un point N, et, d'après une propriété bien connue de la parabole, les deux segments QA et AN sont égaux. La droite joignant le point A au point I, milieu du segment MN, est donc parallèle à MQR.

Si par M nous menons MP parallèle à BC, la droite joignant le point B au milieu K de PM sera de même

Fig. 1.



parallèle à MQR, et par suite les deux droites AI et BK sont parallèles.

Étant donnée la direction de la tangente commune aux deux paraboles, la construction du point de contact correspondant se fera de la manière suivante. Menons AI parallèle à cette direction et construisons la droite AM, conjuguée harmonique de Ax par rapport aux deux droites AI et AC. Construisons de la même manière la droite BM, conjuguée harmonique de By par rapport à BK et BC : le point de rencontre M des deux droites BM et AM est le point cherché.

Inversement, étant donnée la direction AM, on construira la direction AI et par suite les droites BK et BM.

On voit qu'à une droite AM correspond une direction unique de la droite AI et une seule droite BM, et, réciproquement, à une droite BM correspond une seule droite AM.

Les droites AM et BM sont donc deux rayons de faisceaux homographiques dont les points fixes sont les points A et B.

Détermination de cette conique. — La conique passe par les deux points fixes A et B : pour déterminer la tangente au point B, par exemple, il nous suffira de faire tourner le rayon AM jusqu'à ce qu'il coïncide avec AB et de chercher la position correspondante de BM.

Points sur Oy. — Nous avons déjà un premier point B situé sur Oy. Pour obtenir le second point, nous considérerons la parabole (B), infiniment aplatie sur Oy, et nous construirons une parabole (A) tangente à cette droite. En désignant par E le point de rencontre de AC et de Oy, le point de contact cherché F est tel que $OF = 2OE$.

On déterminera de la même façon le second point situé sur Ox.

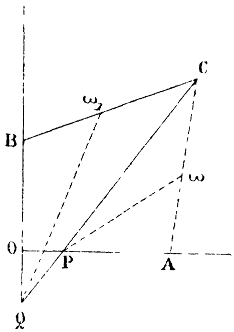
Points sur AC. — Le second point D situé sur AC s'obtiendra en considérant la parabole (A) infiniment aplatie sur AC et en menant une parabole (B) tangente à cette droite. On voit facilement que ce point D est tel que les projections de BC et de CD sur Ox sont égales.

On déterminera de la même façon le second point situé sur BC.

Deuxième Partie.

Asymptotes et genre de la conique. — Pour déterminer les asymptotes de la conique, nous devons chercher les droites AM et BM parallèles, puisque leur point d'intersection sera rejeté à l'infini. Soit CPQ la direction commune des deux droites AM et BM (*fig.* 2). En joignant le point P au point ω, milieu de AC, et le point Q au point ω_1, milieu de BC, nous obtenons deux

Fig. 2.



droites ωP et ω_1Q qui sont parallèles à la tangente commune aux deux paraboles. Le problème consiste donc à mener, par les deux points ω et ω_1, deux droites parallèles ωP et ω_1Q, telles que la droite PQ passe par le point C, ou à mener par le point C des tangentes à la courbe enveloppe des droites PQ.

Or l'enveloppe des droites PQ est une hyperbole dont nous connaissons l'équation. En désignant par

$$x_0 = \frac{a+x}{2}, \qquad y_0 = \frac{y}{2}, \qquad x_1 = \frac{x}{2}, \qquad y_1 = \frac{b+y}{2}$$

les coordonnées de ω et de ω_1, cette équation est

$$(Yx_1 + Xy_0 - x_1y_0 - x_0y_1)^2 = 4(x_0x_1 - Xx_0)(y_0y_1 - Yy_1).$$

Nous exprimerons que la conique est une hyperbole en exprimant que le point $C(x, y)$ est dans la même région, par rapport à cette hyperbole, que le centre. Cette condition est

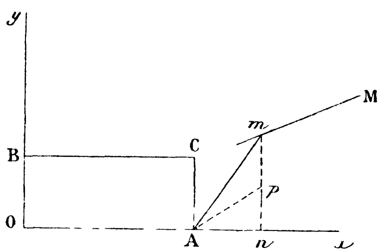
$$(ay + bx - ab)(8xy + ay + bx - ab) > 0.$$

Troisième Partie.

On peut prévoir que, dans le cas particulier où les droites AC et BC sont parallèles aux axes, la tangente commune passe par un point fixe.

Cherchons combien, d'un point donné M, on peut mener de droites MPQ, telles que les paraboles (A) et (B) soient tangentes à cette droite au même point. Soit m le point de contact des deux paraboles (*fig.* 3). Les quatre directions Ax, AC, Am et Ap parallèle

Fig. 3.



à mM sont conjuguées harmoniques; à une direction mM correspond une seule direction Am, et réciproquement. Si la droite Mm varie, le lieu du point m est le lieu d'intersection de deux rayons de faisceaux homographiques ayant pour points fixes les points M et A. Ce lieu est donc une conique. On voit facilement que cette conique est une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles à Ox et à Oy. En agissant de même pour le point B, on obtient une seconde hyperbole ayant mêmes directions asymptotiques et passant par les points M et B. Les droites joignant le point M aux points d'intersection de ces deux hyperboles sont les tangentes cherchées.

Ces deux coniques ayant trois points communs, deux à l'infini dans les directions (Ox, Oy) et un en M, se coupent en un seul point.

L'enveloppe des tangentes communes, étant une courbe telle que d'un point on ne peut lui mener qu'une seule tangente, est un point. Les tangentes communes passent donc toutes par un point fixe.

Prenons comme direction de la tangente commune la droite OC : la construction de la première partie donne, pour le point de contact, un point de OC. Lorsque ce point de contact est confondu avec le point G, centre de gravité du triangle ABC, la même construction indique que les deux paraboles ont, en ce point, une même tangente parallèle à AB. Le point G est donc le point fixe cherché.

Autre démonstration.

Soient MP la tangente qui rencontre BC en I (*fig.* 4), et N le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Ox. On a

$$BI = \frac{ON}{2}$$

et

$$PA = AN,$$

d'où

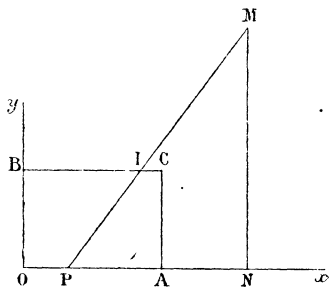
$$CI = OA - \frac{ON}{2}$$

et

$$OP = 2\left(OA - \frac{ON}{2}\right);$$

donc $CI = \frac{OP}{2}$ et la droite MP passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

Fig. 4.



Quatrième Partie.

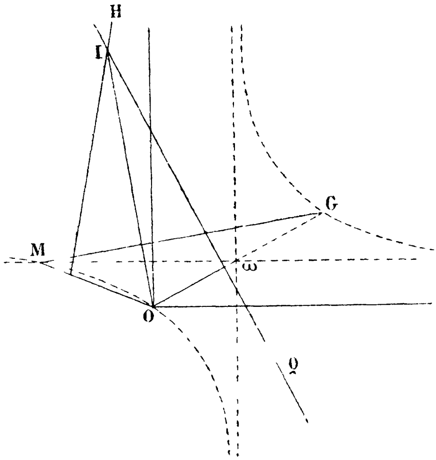
Transformons par polaires réciproques, en prenant comme conique fixe un cercle ayant son centre en O. Les deux paraboles se transforment en deux coniques passant par l'origine et ayant pour axes des parallèles à Ox et à Oy. Elles sont tangentes en un point I (*fig.* 5), qui est situé sur la polaire du point G par rapport au cercle. Elles se coupent en un quatrième point H, qui est le pôle de la seconde tangente commune aux deux paraboles. La droite IH est la polaire du point d'intersection de ces deux tangentes.

Or les deux coniques ayant leurs axes parallèles, leurs droites d'intersection sont également inclinées sur les axes : IH et IO sont donc également inclinées sur Oy.

Revenons à la première figure. Le point I se transforme en une droite passant par G et perpendiculaire à OI, la droite IH en un point M sur GM et sur la perpendiculaire abaissée de O sur IH.

Les deux droites GM et OM sont deux rayons de faisceaux homographiques, et le lieu de leur intersec-

Fig. 5.



tion est une hyperbole ayant pour centre le milieu de OG, passant par O et ayant pour asymptotes des parallèles à Ox et à Oy.