NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. GOMES TEIXEIRA

Démonstration d'une formule de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 382-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__382_1>

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE WARING;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'École Polytechnique de Porto.

Dans un intéressant article intitulé : *Sur certaines fonctions symétriques; application au calcul de la somme des puissances semblables des racines d'une équation* (1), M. M. d'Ocagne calcule, au moyen de la théorie des fonctions symétriques, la fonction

$$\frac{1}{(x-x_1)^n}+\frac{1}{(x-x_2)^n}+\ldots+\frac{1}{(x-x_p)^n},$$

où $x_1, x_2, \ldots$ représentent les racines de l'équation

$$U = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x + A_p = 0;$$

et ensuite déduit, du résultat auquel il arrive, une formule pour le calcul de la somme des puissances semblables des racines de cette équation, analogue à celle de Waring. Il part de l'identité

$$D_x \log U = \sum \frac{1}{x - x_\omega}$$

qui, étant dérivée $n - 1$ fois par rapport à x, donne

$$\sum \frac{1}{(x-x_\omega)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_x^n \log U.$$

Le but de cette Note est de faire voir qu'on peut, par

(1) *Jornal de Sciencias mathematicas* (Coimbra), t. VII, p. 133.

la méthode de M. M. d'Ocagne, obtenir la formule de Waring en faisant usage pour le calcul de $D_x^n \log U$ d'une formule différente de celle qu'il a employée, à savoir (¹)

$$y^{(n)} = \sum \frac{n!\,\dfrac{d^i y}{du^i}\,(u')^{\alpha}(u'')^{\beta}\dots(u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(1!)^{\alpha}(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\dots(n!)^{\lambda}},$$

où $\sum$ représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \dots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

En effet, cette formule donne

$$D_x^n \log U = \sum (-1)^{i-1} \frac{n!\,(i-1)!\,U^{-i}\,U'^{\alpha}\,U''^{\beta}\dots U^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\dots(p!)^{\lambda}},$$

$$\alpha + 2\beta + \dots + p\lambda = n,$$

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda,$$

parce que

$$U^{(p+1)} = U^{(p+2)} = \dots = U^{(n)} = 0.$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = (-1)^n n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,U^{-i}\,U'^{\alpha}\,U''^{\beta}\dots(U^{(p)})^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}\dots(p!)^{\lambda}}$$

et, en posant $x = 0$,

$$\sum \frac{1}{x_\omega^i} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,U_0^{-i}\,U_0'^{\alpha}\dots U_0^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\dots(p!)^{\lambda}}$$

ou

$$\sum \frac{1}{x_\omega^i} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,A_p^{-i}\,A_{p-1}^{\alpha}\,A_{p-2}^{\beta}\dots A_0^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!}.$$

(¹) *Voir* le *Calcul différentiel* de M. J. Bertrand, p. 308, ou mon *Curso de Analyse infinitesimal*, p. 184.

En appliquant maintenant cette formule à l'équation

$$A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

dont les racines sont inverses des racines de l'équation proposée, on trouve la formule de Waring

$$\sum x_\omega^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, A_0^{-i} A_1^\alpha A_2^\beta \ldots A_p^\lambda}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!},$$

où α, β, ..., λ sont les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$