Nouvelles annales de mathématiques

E. Cesàro

Sur les transformations de la série de Lambert

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 374-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__374_1>

SUR LES TRANSFORMATIONS DE LA SÉRIE DE LAMBERT;

PAR M. E. CESARO.

Si l'on donne aux deux séries convergentes

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \qquad V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

il est tout naturel de dire que la seconde *converge* *moins* que la première lorsque le rapport de son reste β_n au reste α_n de la première série augmente indéfiniment avec n. Si le rapport en question tend vers zéro, la première série converge moins que la seconde. Si la première série est à termes positifs, et que le rapport de v_n à u_n tende vers une limite λ, il existe, pour tout nombre ε, arbitrairement petit, un nombre fini ν, tel que, pour $n > \nu$, les rapports

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}, \quad \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{v_{n+p}}{u_{n+p}},$$

et, par suite,

$$\frac{v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots+v_{n+p}}{u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}},$$

sont tous compris entre $\lambda+\varepsilon$ et $\lambda-\varepsilon$, quel que soit p. Donc, p croissant à l'infini, le rapport de β_n à α_n est compris entre $\lambda+\varepsilon$ et $\lambda-\varepsilon$ pour toutes les valeurs de n supérieures à ν. Autrement dit,

$$(1) \qquad \lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim \frac{v_n}{u_n},$$

pourvu que le second membre existe. On peut donc comparer deux séries, au point de vue de leur convergence, en étudiant le rapport de leurs termes généraux. Ainsi, par exemple, la série $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots$ est *plus convergente* que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, parce que $\lim \alpha_n = 0$.

La série U étant donnée, on peut toujours construire une infinité d'autres séries, qui convergent moins. Il suffit de prendre

$$v_n = f(u_n + u_{n+1} + \ldots) - f(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots),$$

en supposant que $f(x)$ tende vers zéro avec x, tandis que sa dérivée croît à l'infini. On a, en effet,

$$\lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim f'(\alpha_n) = \infty.$$

Ailleurs [1] nous avons démontré une proposition analogue pour les séries divergentes. Il est donc impossible de concevoir qu'on puisse effectivement séparer la classe des séries convergentes de celle des séries divergentes.

Si, dans la série U, le rapport d'un terme au terme précédent tend vers une limite λ, et que l'on prenne $v_n = u_{n+1}$ dans la relation (1), on obtient

$$\lim\left(1 - \frac{u_{n+1}}{\alpha_n}\right) = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda,$$

d'où

$$\lim \frac{\alpha_n}{u_n} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

En particulier,

$$\lim \frac{\alpha_n}{u_n} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim \frac{\alpha_n}{u_n} = \infty,$$

suivant que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Ceci nous explique pourquoi il est avantageux de transformer les séries de manière que, dans les transformées obtenues, le rapport d'un terme au terme précédent ait zéro pour limite. Alors les nouveaux termes finissent par décroître très rapidement; et les erreurs, commises en s'arrêtant à un terme quelconque, décroissent avec une rapidité *infiniment* plus grande. Si, au contraire, $\lambda = 1$, les termes finissent par décroître très lentement, et les erreurs commises décroissent avec une lenteur *infiniment* plus grande.

---

(1) *Voir* les *Rendiconti* des *Lincei*; 1888.

Cela étant, considérons la *série de Lambert*

$$(2)\qquad U = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \ldots.$$

C'est une série convergente, à termes positifs, si $0 < q < 1$. Le rapport d'un terme au terme précédent tend vers q : la série ne converge donc pas assez rapidement. Pour les valeurs de q, très voisines de l'unité, Schlömilch a fait connaître (¹) une transformée intéressante : c'est une série *semi-convergente* de seconde espèce (²). La série de Schlömilch a donc le défaut de ne pas être convergente et, de plus, d'avoir tous les termes de même signe. Ce dernier défaut se rencontre encore dans la *transformée de Clausen* (³)

$$(3)\qquad U = \frac{1+q}{1-q}q + \frac{1+q^2}{1-q^2}q^4 + \frac{1+q^3}{1-q^3}q^9 + \ldots;$$

mais celle-ci possède le caractère de rapide convergence indiqué plus haut, puisque la limite du rapport d'un terme au terme précédent est

$$\lim \frac{1-q^n}{1+q^n}\,\frac{1+q^{n+1}}{1-q^{n+1}}\,q^{2n+1} = 0.$$

Enfin, nous avons fait connaître (⁴) une transformation assez avantageuse, à savoir

$$(4)\qquad U = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1 u_2}{1-q^2} + \frac{u_1 u_2 u_3}{1-q^3} - \ldots,$$

u_n étant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série proposée. Lors même

(¹) *Journal de Liouville*, p. 101; 1863.

(²) *Voir* l'importante *thèse* de M. Stieltjes : *Sur quelques séries semi-convergentes*. Paris, 1886.

(³) *Journal de Crelle*, IIIᵉ Cahier, p. 94.

(⁴) *Mathesis*, p. 126; 1886.

qu'on prendrait tous les termes positivement, la limite du rapport d'un terme au terme précédent serait

$$\lim \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q^{i}} u_n = 0.$$

La série (4) est donc *absolument* et *rapidement* convergente : elle présente, en outre, le précieux avantage d'être à termes alternativement positifs et négatifs, ce qui permet d'assigner, à chaque instant, des limites de l'erreur commise.

La transformation de Clausen prend sa source dans l'identité

$$(5) \qquad \sum_{i,j}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[a_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{j=n} (a_{i,j} + a_{j,i}) \right].$$

En particulier, la somme

$$\sum_{i,j}^{\infty} a^i b^j q^{ij} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{ab^i q^i}{1 - aq^i} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{ba^i q^i}{1 - bq^i}$$

se transforme en

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{1 + aq^i}{1 - aq^i} + \frac{1 + bq^i}{1 - bq^i} \right) a^i b^i q^{i^2}.$$

Il suffit de faire $a = b = 1$ pour obtenir la transformation de Clausen. Disons, en passant, que l'identité (5) donne lieu à une foule d'autres transformations, plus ou moins intéressantes. Par exemple, si on l'applique à la série elliptique

$$Q(q, x) = 1 + 2qx + 2q^4x^2 + 2q^9x^3 + \ldots,$$

on trouve

$$\begin{aligned} & xQ(q, x) + x^2Q(q^4, x) + x^3Q(q^9, x) + \ldots \\ & = \frac{x}{1 - x} + 2[qx^2Q(q, q^2x) + q^{16}x^4Q(q^4, q^{16}x) \\ & \qquad + q^{81}x^6Q(q^9, q^{54}x) + \ldots]. \end{aligned}$$

Du reste, il n'est pas difficile d'étendre l'identité (5) au cas de quantités à plusieurs indices. Ainsi, pour trois indices dont l'ordre est indifférent, on peut écrire

$$\sum_{i,j,k}^{n} a_{i,j,k} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,i,i} + 3\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=i+1}^{j=n}(a_{i,i,j}+a_{i,j,j})$$
$$+6\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=i+1}^{j=n}\sum_{k=j+1}^{k=n} a_{i,j,k}.$$

Soient respectivement α_n, β_n, γ_n les restes de la série de Lambert et de ses transformées (3) et (4). Nous avons démontré, dans un de nos précédents articles ([1]), la formule

$$\alpha_n = \frac{1+q}{1-q}\log\sqrt{\frac{1+q}{1+q-2q^{n+1}}} + \frac{\theta}{6}q^{n+1}u_n,$$

θ étant une fraction proprement dite; mais nous voulons donner ici une nouvelle expression de α_n, exempte de tout calcul logarithmique. Rappelons, dans ce but, que la transformation (4) est un cas particulier de la relation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots \\ &\quad = \frac{qx}{(1-qx)(1-q)} - \frac{q^3x^2}{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^2)} \\ &\qquad + \frac{q^6x^3}{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)(1-q^3)} - \ldots, \end{aligned}\right.$$

qu'on déduit, à son tour, d'une remarquable formule de Cauchy ([2]). Du reste, le premier membre peut également prendre la forme

$$\frac{qx}{1-qx} + \frac{q^2x}{1-q^2x} + \frac{q^3x}{1-q^3x} + \ldots,$$

([1]) *Nouvelles Annales*, p. 106; 1886.

([2]) *Comptes rendus*, t. XVII, p. 530.

et, par suite, il devient égal à α_n pour $x = q^n$. Dès lors, la formule (6) donne

$$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{1-q} - \frac{u_{n+1}\,u_{n+2}}{1-q^2} + \frac{u_{n+1}\,u_{n+2}\,u_{n+3}}{1-q^3} - \ldots.$$

Donc, si q est suffisamment petit,

$$\alpha_n < \frac{u_{n+1}}{1-q} < q^n.$$

Pour calculer β_n, appliquons l'identité (5) au cas de $a_{i,j} = q^{ij}$. On trouve que les expressions

$$\frac{1-q^n}{1-q}\,q + \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\,q^2 + \frac{1-q^{3n}}{1-q^3}\,q^3 + \ldots + \frac{1-q^{n^2}}{1-q^n}\,q^n,$$

$$\frac{1+q-2q^n}{1-q}\,q + \frac{1+q^2-2q^{2(n-1)}}{1-q^2}\,q^4 + \ldots + \frac{1+q^n-2q^n}{1-q^n}\,q^{n^2}$$

sont identiques. Il en résulte

$$\sum_1^n \frac{1+q^i}{1-q^i}\,q^{i^2} - \sum_1^n \frac{q^i}{1-q^i} = \frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{2n+2}}{1-q^2} + \ldots + \frac{q^{n^2+n}}{1-q^n}.$$

Sous une autre forme,

$$\alpha_n - \beta_n = q^n u_1 + q^{2n} u_2 + q^{3n} u_3 + \ldots + q^{n^2} u_n,$$

d'où

$$\beta_n = q^{n(n+1)} u_{n+1} + q^{n(n+2)} u_{n+2} + q^{n(n+3)} u_{n+3} + \ldots.$$

On en déduit, à cause de $u_{i+j} < q^i u_j$,

$$\beta_n < q^{n(n+2)} u_1 + q^{n(n+3)} u_2 + \ldots = q^{n(n+1)} \alpha_n;$$

puis

$$\beta_n < q^{n(n+1)} \alpha_n < q^{n(n+2)},$$

ce qui confirme la supériorité de la série de Clausen sur celle de Lambert. Enfin, il est clair que

$$\gamma_n = \frac{u_1 u_2 \ldots u_{n+1}}{1-q^{n+1}} - \theta\,\frac{u_1 u_2 \ldots u_{n+2}}{1-q^{n+2}};$$

puis

$$\gamma_n < \frac{u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1}^2}{q^{n+1}} < \frac{q^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1-q)^{n+2}} < q^{\frac{n(n+3)}{2}},$$

pourvu que $n+2$ ne surpasse pas le rapport des logarithmes de q et $1-q$. Soit, par exemple, $q = \frac{1}{10}$, de sorte que

$$U = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \dots = 0,122324243426\dots.$$

En employant la série (2), on ne peut compter que sur n décimales exactes, tandis que la série (3) nous en donne $n(n+2)$. Quant à la série (4), elle nous fournit $\frac{n(n+3)}{2}$ décimales exactes, si n est inférieur à 20. Le *dernier* chiffre serait inexact si n surpassait 19, sans surpasser 42, etc. Ainsi, par exemple, avec les *cinq* premiers termes de la série de Clausen, ou les *sept* premiers termes de (4), on obtient *trente-cinq* décimales exactes. Pour avoir la même approximation avec la série de Lambert, il faudrait prendre 35 termes; mais, avec un pareil nombre de termes, la série (4) nous donnerait 664 décimales exactes, et la série de Clausen nous permettrait de pousser les calculs jusqu'à la 1295^e décimale, inclusivement.

Il est évident que α_n surpasse q^{n+1}. En outre, si l'on observe que u_n surpasse q^n, on peut écrire

$$\beta_n > q^{(n+1)^2} + q^{(n+1)(n+2)} + \dots > q^{n(n+2)+1}.$$

On voit donc que les approximations signalées précédemment sont les plus grandes qu'on puisse obtenir dans chaque cas. Ainsi, pour $q = \frac{1}{10}$, on ne doit pas espérer que l'emploi des n premiers termes de la série de

Lambert ou de la série de Clausen conduise à plus de n ou $n(n+2)$ chiffres exacts.