NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PH. GILBERT

Remarques sur l'intégration par partie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 365-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__365_1>

REMARQUES SUR L'INTÉGRATION PAR PARTIE;

PAR M. PH. GILBERT, à Louvain.

Les cas dans lesquels l'intégration par partie s'applique avantageusement, en ramenant l'intégrale proposée à elle-même ou à une autre plus simple, sont moins généraux qu'on ne le croit d'ordinaire, et supposent entre les fonctions sous le signe $\int$ des relations très étroites.

Ainsi, soient u, v deux fonctions de x, n un nombre entier, et posons

$$\int v\,dx = v_1, \qquad \int v_1\,dx = v_2, \qquad \cdots$$

La formule

$$(1) \qquad \int u^n v\,dx = u^n v_1 - n\int u^{n-1} v_1\,du$$

conduit, lorsqu'on a entre u et v la relation

$$v_1\,du = \frac{v}{\alpha}\,dx \quad (\alpha \text{ constant}),$$

à la formule de *réduction* assez employée

$$(2) \qquad \int u^n v\,dx = u^n v_1 - \frac{n}{\alpha}\int u^{n-1} v\,dx.$$

Mais la condition ci-dessus donne

$$\alpha\frac{du}{dx} = \frac{v}{v_1} = \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx},$$

d'où, β étant une constante,

$$l.v_1 = \alpha u + \beta, \qquad v_1 = e^{\alpha u+\beta}, \qquad v = \alpha e^{\alpha u+\beta}\frac{du}{dx}.$$

C'est la forme la plus générale de v qui se prête à la transformation (2), et elle est entièrement déterminée par celle de u.

On peut généraliser la question et poser, dans (1),

$$v_1\,du = \left(\beta u + \frac{\alpha}{u^{p-1}}\right) v\,dx,$$

α, β, p étant des constantes. On a alors, au lieu de la formule (1), celle-ci

$$(3) \qquad \int u^n v\,dx = \frac{u^n v_1}{1+n\beta} - \frac{n\alpha}{1+n\beta}\int u^{n-p} v\,dx.$$

Mais on a aussi, pour déterminer v_1 et par suite v, l'égalité

$$\frac{v}{v_1} = \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx} = \frac{u^{p-1}}{\alpha + \beta u^p}\frac{du}{dx},$$

et cette équation intégrée donne, en négligeant une constante inutile,

$$v_1 = (\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}}, \qquad v = u^{p-1}(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}-1}\frac{du}{dx};$$

v est donc encore déterminé par u. L'équation (3) devient donc

$$\int u^{n+p-1}(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}-1} du$$
$$= \frac{u^n(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}}}{1 + n\beta} - \frac{n\alpha}{1 + n\beta}\int u^{n-1}(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}-1} du,$$

ce qui est, au fond, la formule de réduction des différentielles binômes.

L'intégration par partie donne immédiatement

$$\int uv\,dx = uv_1 - \int v_1\frac{du}{dx}dx,$$
$$\int v_1\frac{du}{dx}dx = v_2\frac{du}{dx} - \int v_2\frac{d^2u}{dx^2}dx.$$

Si l'on suppose entre u et v la relation

$$v_2\frac{d^2u}{dx^2} = \mu uv \quad (\mu \text{ constant}),$$

on aura

$$\int uv\,dx = uv_1 - v_2\frac{du}{dx} + \mu\int uv\,dx,$$

d'où l'on tirera

$$(4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int uv\,dx = \frac{1}{1-\mu}\left(uv_1 - v_2\frac{du}{dx}\right), \\ \displaystyle\int v_1\frac{du}{dx}dx = \frac{1}{1-\mu}\left(v_2\frac{du}{dx} - \mu uv_1\right). \end{cases}$$

Mais l'équation de condition peut s'écrire

$$\frac{1}{u}\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\mu}{v_2}\frac{d^2 v_2}{dx_2},$$

en sorte que, si l'on désigne par $\varphi(x)$ une fonction donnée de x, et si l'on pose

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = u\,\varphi(x),$$

on aura

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{v_2}{\mu}\,\varphi(x).$$

L'intégration de ces équations fera connaître u et v_2, et par suite $v = \frac{d^2 v_2}{dx^2}$. *Ainsi, si u et v_2 désignent deux intégrales quelconques de l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{C}\,\varphi(x) y,$$

répondant à des valeurs différentes de la constante C, *on pourra trouver sous forme finie l'intégrale*

$$\int u \frac{d^2 v_2}{dx^2}\,dx.$$

Si l'on pose $\varphi(x) = \alpha^2$, $\alpha^2 = -\mu\beta^2$, on retrouvera les formules connues. Si l'on pose $\varphi(x) = \alpha x^m$, u et v_2 seront déterminés par des équations de Riccati. La liaison de ce qui précède avec les propriétés des fonctions sphériques et des fonctions de Bessel, dont on fait usage dans la théorie de la chaleur, est facile à apercevoir.