

WORONTZOF

**Sur le développement en séries des
fonctions implicites**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 362-365

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7_362_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR M. WORONTZOF.

Soient

$$\begin{aligned} m &= f(y), \\ x &= \Phi(y) = \Psi[f(y)] \end{aligned}$$

deux équations entre les variables x , y et m ;

$$y = f_v(m), \quad y = f_v(0) = r \quad (2)$$

(¹) Les droites du système θ ne sont que les *normales* à la surface Σ dans l'espace ou l'*absolu* est la surface Σ' .

(²) Soit, par exemple

$$\begin{aligned} f(m) &= e^m - 1, & \sin m, & & (m + c)^a, \\ \frac{a - m}{c + m}, & & \frac{1 - m}{1 + m}, & & \dots; \end{aligned}$$

on a respectivement

$$\begin{aligned} f_v(m) &= \log(m + 1), & \arcsin m, & & m^{\frac{1}{a}} - c, \\ \frac{a - cm}{1 + m}, & & \frac{1 - m}{1 - m}, & & \dots \end{aligned}$$

les racines des équations

$$f(y) - m = 0, \quad f(y) = 0,$$

de sorte qu'on ait identiquement

$$f[f_v(m)] = m, \quad f(r) = 0;$$

et $F(x)$ une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de m . Si l'on donne

$$x = \Phi[r + m \varphi(x)],$$

on a alors

$$m = f(y) = \frac{y - r}{\varphi[\Phi(y)]},$$

$$x = \Phi(y).$$

En vertu des égalités

$$\begin{aligned} \left[\frac{d \Psi(m)}{dm} \right]_{m=f(y)} &= [D_m \Psi(m)]_{m=f(y)} \\ &= \Psi'[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)} \right] D_y \Psi[f(y)], \\ [D_m^2 \Psi(m)]_{m=f(y)} &= \Psi''[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(2)} \Psi[f(y)] \\ &= \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right] \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right] \Psi[f(y)], \\ &\dots\dots\dots, \\ [D_m^n \Psi(m)]_{m=f(y)} &= \Psi^{(n)}[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(n)} \Psi[f(y)], \end{aligned}$$

on obtient, en substituant $f_v(m)$ au lieu de y ,

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}(m) &= D_m^n \Psi \{ f[f_v(m)] \}; \\ &= \left\{ \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(n)} \Psi[f(y)] \right\}_{y=f_v(m)}, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\Psi[f(y)]$ par $\Phi(y)$,

$$D_m^n \Phi[f_v(m)] = D_m^n \Phi(y) = \left\{ \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(n)} \Phi(y) \right\}_{y=f_v(m)},$$

ou, plus généralement,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} D_m^n F[\Phi(y)] &= D_m^n F(x) \\ &= \left\{ \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(n)} F[\Phi(y)] \right\}_{y=f_v(m)}. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de la formule précédente et de la série de Maclaurin, prise avec le terme complémentaire (R_n) de Lagrange, on trouve

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} F[\Phi(y)] \\ &= F[\Phi[f_v(m)]] = F(x) = F[\Phi(r)] \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2.3\dots k} \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(k)} F[\Phi(z)] \right\}_{z=r} \\ &+ \frac{m^n}{1.2.3\dots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(n)} F[\Phi(z)] \right\}_{z=r+\theta(y-r)=f_v(\theta, m) \quad \gamma=f_v(m)=\Phi_v(x)} \end{aligned} \right.$$

et aussi, pour $\Phi(y) = y = x$,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} F[f_v(m)] &= F(x) = F(r) \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2\dots k} \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(k)} F(z) \right\}_{z=r} \\ &+ \frac{m^n}{1.2\dots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(n)} F(z) \right\}_{z=r+\theta(x-r)=f_v(\theta, m)}, \end{aligned} \right.$$

où $0 < \theta < 1$.

Exemple. — En posant successivement

$$\begin{aligned} x &= \Phi(y) = e^{ay}, & m &= f(y) = e^{cy} - h, \\ x &= y^a, & m &= y^c - h, \\ &\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ou a

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(k)} \Phi(y) &= \left(\frac{e^{-cy}}{c} D_y \right)^{(k)} e^{ay} \\ &= a(a-c)(a-2c)\dots[a-(k-1)c] \frac{e^{(a-kc)y}}{c^k}, \\ \gamma &= \log(h + m)^{\frac{1}{c}}, & r &= \log h^{\frac{1}{c}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c} y^{c-1} D_y \right)^{(k)} y^a \\ &= a(a-c)(a-2c)\dots[a-(k-1)c] \frac{y^{a-kc}}{c^k}, \\ & \quad y = (h+m)^{\frac{1}{c}}, \quad r = h^{\frac{1}{c}}, \\ & \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et, par conséquent, d'après la formule (2),

$$\begin{aligned} x &= h^{\frac{a}{c}} + a \frac{m}{c} h^{\frac{a}{c}-1} + \frac{a(a-c)}{1.2} \left(\frac{m}{c} \right)^2 h^{\frac{a}{c}-2} + \dots \\ &+ \frac{a(a-c)\dots[a-(n-2)c]}{1.2.3\dots(n-1)} \left(\frac{m}{c} \right)^{n-1} h^{\frac{a}{c}-(n-1)} + R_n = (h+m)^{\frac{a}{c}}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{a(a-c)\dots[a-(n-1)c]}{1.2.3\dots n} \left(\frac{m}{c} \right)^n h^{\frac{a}{c}-n} \left(1 + \frac{\theta m}{h} \right)^{\frac{a}{c}-n} \\ &= \frac{a(a-c)\dots[a-(n-1)c]}{1.2.3\dots n} \left(\frac{m}{c} \right)^n h^{\frac{a}{c}-n} \left(1 + \frac{m}{h} \right)^{\theta_1 \left(\frac{a}{c}-n \right)} \\ &= \frac{a(a-c)\dots[a-(n-1)c]}{1.2.3\dots n} \left(\frac{m}{c} \right)^n h^{\frac{a}{c}-n} \left\{ 1 + \theta_2 \left[\left(1 + \frac{m}{h} \right)^{\frac{1}{c}} - 1 \right] \right\}^{a-nc}. \end{aligned}$$