WORONTZOF

Sur le développement en séries des fonctions implicites

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 362-365
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__362_1>

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR M. WORONTZOF.

Soient

$$m = f(y),$$
$$x = \Phi(y) = \Psi[f(y)]$$

deux équations entre les variables x, y et m;

$$y = f_v(m), \qquad y = f_v(0) = r \quad (^2)$$

---

(1) Les droites du système Θ ne sont que les *normales* à la surface Σ dans l'espace ou l'*absolu* est la surface Σ'.

(2) Soit, par exemple

$$f(m) = e^m - 1, \qquad \sin m, \qquad (m+c)^a,$$
$$\frac{a-m}{c+m}, \qquad \frac{1-m}{1+m}, \qquad \ldots;$$

on a respectivement

$$f_1(m) = \log(m+1), \qquad \arcsin m, \qquad m^{\frac{1}{a}} - c,$$
$$\frac{a-cm}{1+m}, \qquad \frac{1-m}{1+m}, \qquad \ldots.$$

les racines des équations

$$f(y) - m = 0, \qquad f(y) = 0,$$

de sorte qu'on ait identiquement

$$f[f_\nu(m)] = m, \qquad f(r) = 0;$$

et $F(x)$ une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de m. Si l'on donne

$$x = \Phi[r + m\varphi(x)],$$

on a alors

$$m = f(y) = \frac{y - r}{\varphi[\Phi(y)]},$$
$$x = \Phi(y).$$

En vertu des égalités

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d\Psi(m)}{dm}\right]_{m=f(y)} &= [D_m \Psi(m)]_{m=f(y)} \\
&= \Psi'[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)}\right] D_y \Psi[f(y)], \\
[D_m^2 \Psi(m)]_{m=f(y)} &= \Psi''[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]^{(2)} \Psi[f(y)] \\
&= \left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]\left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right] \Psi[f(y)], \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
[D_m^n \Psi(m)]_{m=f(y)} &= \Psi^{(n)}[f(y)] = \left[\frac{1}{f(y)} D_y\right]^{(n)} \Psi[f(y)],
\end{aligned}$$

on obtient, en substituant $f_\nu(m)$ au lieu de y,

$$\begin{aligned}
\Psi^{(n)}(m) &= D_m^n \Psi\{f[f_\nu(m)]\} \\
&= \left\{\left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]^{(n)} \Psi[f(y)]\right\}_{y=f_\nu(m)},
\end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\Psi[f(y)]$ par $\Phi(y)$,

$$D_m^n \Phi[f_\nu(m)] = D_m^n \Phi(y) = \left\{\left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]^{(n)} \Phi(y)\right\}_{y=f_\nu(m)},$$

ou, plus généralement,

$$(1)\quad \begin{cases} D^n_m\, F[\Phi(y)] = D^n_m\, F(x) \\ \qquad = \left\{ \left[\dfrac{1}{f'(y)}\, D_y \right]^{(n)} F[\Phi(y)] \right\}_{y=f_\nu(m)}. \end{cases}$$

Au moyen de la formule précédente et de la série de Maclaurin, prise avec le terme complémentaire (R_n) de Lagrange, on trouve

$$(2)\quad \begin{cases} F[\Phi(y)] \\ \quad = F\{\Phi[f_\nu(m)]\} = F(x) = F[\Phi(r)] \\ \qquad + \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2.3\ldots k} \left[\frac{1}{f'(z)}\, D_z \right]^{(k)} F[\Phi(z)] \right\}_{z=r} \\ \qquad + \dfrac{m^n}{1.2.3\ldots n} \left\{ \left[\dfrac{1}{f'(z)}\, D_z \right]^{(n)} F[\Phi(z)] \right\}_{z=r+\theta(y-r)=f_\nu(\theta_1 m),\ y=f_\nu(m)=\Phi_\nu(x)} \end{cases}$$

et aussi, pour $\Phi(y) = y = x$,

$$(3)\quad \begin{cases} F[f_\nu(m)] = F(x) = F(r) \\ \qquad + \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2\ldots k} \left[\frac{1}{f'(z)}\, D_z \right]^{(k)} F(z) \right\}_{z=r} \\ \qquad + \dfrac{m^n}{1.2\ldots n} \left\{ \left[\dfrac{1}{f'(z)}\, D_z \right]^{(n)} F(z) \right\}_{z=r+\theta(x-r)=f_\nu(\theta_1 m)}, \end{cases}$$

où $0 < \theta < 1$.

Exemple. — En posant successivement

$$\begin{aligned} x &= \Phi(y) = e^{ay}, & m &= f(y) = e^{cy} - h, \\ x &= y^a, & m &= y^c - h, \\ &\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{f'(y)}\, D_y \right]^{(k)} \Phi(y) &= \left(\frac{e^{-cy}}{c}\, D_y \right)^{(k)} e^{ay} \\ &= a(a-c)(a-2c)\ldots[a-(k-1)c]\, \frac{e^{(a-kc)y}}{c^k}, \end{aligned}$$

$$y = \log(h+m)^{\frac{1}{c}}, \qquad r = \log h^{\frac{1}{c}},$$

$$\left(\frac{1}{c y^{c-1}} D_y\right)^{(k)} y^a$$
$$= a(a-c)(a-2c)\ldots[a-(k-1)c]\,\frac{y^{a-kc}}{c^k},$$
$$y = (h+m)^{\frac{1}{c}}, \qquad r = h^{\frac{1}{c}},$$
$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots,$$

et, par conséquent, d'après la formule (2),

$$x = h^{\frac{a}{c}} + a\frac{m}{c} h^{\frac{a}{c}-1} + \frac{a(a-c)}{1.2}\left(\frac{m}{c}\right)^2 h^{\frac{a}{c}-2} + \ldots$$
$$+ \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-2)c]}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{m}{c}\right)^{n-1} h^{\frac{a}{c}-(n-1)} + R_n = (h+m)^{\frac{a}{c}},$$

où

$$R_n = \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-1)c]}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{m}{c}\right)^n h^{\frac{a}{c}-n}\left(1+\frac{\theta m}{h}\right)^{\frac{a}{c}-n}$$
$$= \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-1)c]}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{m}{c}\right)^n h^{\frac{a}{c}-n}\left(1+\frac{m}{h}\right)^{\theta_1\left(\frac{a}{c}-n\right)}$$
$$= \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-1)c]}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{m}{c}\right)^n h^{\frac{a}{c}-n}\left\{1+\theta_2\left[\left(1+\frac{m}{h}\right)^{\frac{1}{c}}-1\right]\right\}^{a-nc}.$$