Nouvelles annales de mathématiques

A. Del Re

Sur une question de géométrie liée à la théorie des normales à une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 359-362

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__359_1>

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE LIÉE A LA THÉORIE DES NORMALES A UNE QUADRIQUE;

PAR M. A. DEL RE, à Naples.

Je ne sais si l'on a jamais pensé à la question suivante, mais elle peut être de quelque intérêt dans la théorie de la surface des centres d'une surface donnée du deuxième ordre. Soient Σ cette dernière surface, Σ_c sa surface des centres et P un point quelconque de l'espace. Si, du sommet P, on circonscrit à Σ_c le cône (P), il y aura, dans chaque plan tangent de ce cône, une seule normale à Σ : *on se propose de chercher le lieu des pieds de toutes les normales ainsi obtenues.*

Par le point P menons un plan quelconque σ, et, par son pôle S, par rapport à Σ, menons la perpendiculaire s

à ce plan. Lorsqu'on fait varier σ autour de P, le point S et le point à l'infini de s décrivent deux systèmes plans réciproques à la gerbe décrite par σ, et, conséquemment, collinéaires entre eux. Donc la droite s et le plan σ se coupent (*voir* ma Note *Nuova costruzione della sup. del.* 5° *ordine*, etc., dans les *Rendiconti dell' Acc. di Napoli*, 1886) dans un point M qui décrit une surface du cinquième ordre douée d'une courbe double du même ordre et ayant un point triple au point P. Nommons Φ cette surface. Elle est précisément celle que M. Darboux ([1]) obtient en cherchant le lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces homofocales à Σ, conduits par P, et cette coïncidence je l'ai démontrée dans ma Note citée. La surface Φ passe donc, comme il est d'ailleurs presque évident, par la conique (Π), suivant laquelle Σ est coupée par le plan polaire Π de P, par rapport à Σ; et *ces deux surfaces* Σ *et* Φ *ont ultérieurement en commun une courbe du huitième ordre* C^8. Je dis que *cette courbe est le lieu cherché*.

En effet, prenons un point quelconque M de la surface Φ, et soient σ et s le plan et la droite, construits comme précédemment, qui l'ont fourni. Si dans le plan σ on conduit par M les tangentes à Σ; les points de contact de ces deux tangentes seront les pieds des deux normales à cette surface contenues en σ ([2]). Donc on aura ces deux normales coïncidentes, c'est-à-dire que σ sera un plant tangent de (P), si le point M est un point aussi bien de Φ que de Σ, sans être un point de (Π),

---

([1]) *Sur la surface du cinquième ordre*, etc. (*Bulletin des Sciences math. et astronom.*, p. 40; 1872).

([2]) Cette propriété, je l'ai démontrée dans ma Note *Sulle normali alle sup di* 2° *ordine, ai coni ed alle coniche sferiche* (Naples, tipogr. Trani, 1884); mais elle est d'ailleurs presque évidente.

dans lequel cas σ est tangent à Σ en M. Mais, lorsque cela arrive, le point M est même le pied de l'unique normale dans le plan σ; donc la proposition est ainsi démontrée.

Une première conséquence qui suit de la définition de la courbe C^8, c'est que *par le point* P *passent six cordes à cette courbe, que celles-ci sont les arêtes d'un angle tétraèdre complet, et que enfin la courbe a quatre points sur le cercle à l'infini*. En effet, la surface Φ a six droites qui aboutissent au point P, formant les arêtes d'un angle tétraèdre complet, et passe par le cercle à l'infini.

2. Si l'on voulait résoudre la même question par rapport à une surface Σ', homofocale à Σ, on arriverait à la même surface Φ, grâce à la double définition de cette surface. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Lorsqu'on circonscrit aux surfaces des centres de courbure d'une suite de surfaces homofocales du deuxième ordre (Σ) *les cônes ayant tous un même sommet* P, *le lieu des pieds des normales à ces surfaces contenues dans les plans tangents aux cônes correspondants est une surface du cinquième ordre, laquelle est même le lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces* (Σ), *menés par* P.

3. La question que nous venons de résoudre peut être envisagée à un point de vue plus général.

Soient Σ et Σ' deux surfaces données du deuxième ordre, et Ω l'homographie résultant de la composition des polaires, par rapport à elles. Dans cette homographie, si l'on joint les points de Σ aux points correspondants de la surface Σ'', transformée de Σ, on obtient un système Θ du sixième ordre et de la deuxième classe (1), dont soit Σ_Θ la surface focale. Il s'agit de chercher le lieu des points de Σ tels que les rayons correspondants de Θ soient projetés d'un point P, donné arbitrairement, au moyen de plans tangents à la surface Σ_Θ. Il n'est pas difficile de s'assurer qu'au moyen de la surface du cinquième ordre, engendrée par les points de rencontre des plans de P avec les droites qui unissent les couples des pôles de ces plans par rapport à Σ, Σ', on arrive à des conclusions parfaitement analogues à celles que nous avons exposées dans les numéros précédents.