NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

X. ANTOMARI

Recherche des points doubles dans les courbes unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 356-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__356_1>

RECHERCHE DES POINTS DOUBLES DANS LES COURBES UNICURSALES;

PAR M. X. ANTOMARI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Soit une courbe unicursale définie par les deux équations

$$x = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)},$$

dans lesquelles $f(t)$, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des polynômes entiers en t. Pour trouver les points doubles de cette courbe, on cherche habituellement les valeurs distinctes t_1 et t_2 données à t, et vérifiant les deux équations

$$\frac{f(t_1)}{\psi(t_1)} = \frac{f(t_2)}{\psi(t_2)}, \qquad \frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)} = \frac{\varphi(t_2)}{\psi(t_2)}.$$

Dans la plupart des cas, la résolution de ces équations conduit à des calculs assez compliqués, à cause des solutions étrangères. La recherche des points doubles peut se faire par un procédé généralement plus simple, et qui n'introduit pas de solutions étrangères. L'exposition de ce procédé fait l'objet de la présente Note.

Les équations de la courbe peuvent s'écrire

$$\psi(t)x - f(t) = 0, \tag{1}$$
$$\psi(t)y - \varphi(t) = 0. \tag{2}$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la courbe, il faudrait éliminer t entre les équations (1) et (2). Soient x et y les coordonnées d'un point de la courbe. Il résulte de la théorie des lieux géométriques que si, pour ce point, les équations (1) et (2) ont deux racines communes en t, le point (x, y) est un point double du lieu défini par ces deux équations (voir, à ce sujet, Bourdon, *Applications de l'Algèbre à la Géométrie*, Notes de M. Darboux).

On conclut immédiatement de là que, pour trouver les points doubles de la courbe unicursale, il faut trouver les valeurs de x et de y pour lesquelles les deux polynômes

$$x\psi(t) - f(t) = 0,$$
$$y\psi(t) - \varphi(t) = 0$$

ont un diviseur commun du second degré en t. De même, pour obtenir les points triples, on cherchera les valeurs de x et de y pour lesquelles les mêmes polynômes ont un diviseur commun du troisième degré, et ainsi de suite.

Exemple I. — Trouver les points doubles de la courbe définie par les deux équations

$$x = \frac{t}{(t-1)(t+1)}, \qquad y = \frac{t-2}{(t-1)(t+2)} \quad (^1).$$

Mettons ces équations sous forme entière

$$t^2x - t - x = 0,$$
$$t^2y + (y-1)t - 2(y-1) = 0.$$

Elles sont du second degré. Pour qu'elles admettent un diviseur commun du second degré, il faut qu'elles soient identiques. En identifiant, on obtient

$$\frac{x}{y} = -\frac{1}{y-1} = \frac{x}{2(y-1)};$$

d'où l'on tire, sans calculs,

$$x = -2, \qquad y = 2.$$

Exemple II. — Points doubles de la courbe :

$$x = \frac{t-2}{(t^2-1)(t+2)}, \qquad y = \frac{2t-5}{(t-1)(t-2)}.$$

Il faut trouver les valeurs de x et de y, pour lesquelles les deux polynômes

$$x(t^2-1)(t+2) - (t-2)$$

et

$$y(t-1)(t+2) - (2t-5)$$

ont un diviseur commun du second degré. Soit $\lambda t + \mu$ un facteur indéterminé du premier degré; nous allons

(1) Pruvost, *Géom. analyt.*

déterminer λ, μ, x et y de manière à vérifier l'identité

$$\begin{aligned} & x(t^2-1)(t+2)-(t-2) \\ & \quad = (\lambda t+\mu)[y(t-1)(t+2)-(2t-5)]. \end{aligned}$$

Exprimons, pour cela, que ces ceux expressions sont égales pour les quatre valeurs de t, $t=1$, $t=-1$, $t=2$ et $t=-2$. Nous obtiendrons, pour déterminer λ, μ, x et y, les quatre équations

$$\begin{aligned} 1 &= 3(\lambda+\mu), \\ 3 &= (\mu-\lambda)(7-2y), \\ 12x &= (2\lambda+\mu)(4y+1), \\ 4 &= 9(\mu-2\lambda), \end{aligned}$$

qui donnent bien facilement

$$\lambda = \frac{7}{27}, \qquad \mu = \frac{2}{27}, \qquad x = \frac{4\times 79}{5\times 27} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{58}{5}.$$