

**Théorème réciproque d'un théorème  
de M. E. Cesàro et application**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 7  
(1888), p. 353-356

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1888\\_3\\_7\\_\\_353\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__353_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>



de  $(M)$ , des segments  $EM$ ,  $E\mu$  proportionnels, il en est de même des rayons vecteurs, tels que  $OM$ , relativement aux rayons de courbure de la développée de  $(M)$ .

Puisque  $LE$  est la polaire de  $M$ , par rapport à la circonférence  $(O)$ , le produit de  $OM$  par  $OL$  est constant. La courbe  $(L)$ , lieu des points tels que  $L$ , est donc la transformée par rayons vecteurs réciproques de  $(M)$ ; la normale  $LI$  à  $(L)$  et la normale  $MI$  à  $(M)$  sont, par suite, également inclinées sur  $LM$ . Le point  $I$  est alors le milieu de l'hypoténuse  $ME$  du triangle  $EML$ . La courbe  $(I)$ , lieu des points tels que  $I$ , peut être considérée comme le lieu des points également distants de  $(L)$  et de  $(M)$ . La tangente en  $I$  à  $(I)$  passe alors par le point de rencontre des tangentes en  $L$  et  $M$  à  $(L)$  et  $(M)$ . Comme  $IL = IM$ , cette tangente est la bissectrice de l'angle  $LIM$  et par suite la normale en  $I$  à  $(I)$  est la parallèle  $IH$  à  $LM$ .

Appelons  $\mu'$  le centre de courbure de la développée de  $(M)$  pour le point  $\mu$  de cette courbe.

Par hypothèse  $\frac{M\mu}{ME} = \text{const.}$  Appelons  $\lambda$  ce rapport, on a alors

$$\frac{M\mu}{MI} = 2\lambda \quad \text{et aussi} \quad \frac{\mu I}{M\mu} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda}.$$

Quel que soit le point  $M$ , les courbes  $(I)$ ,  $(M)$  et la développée de cette dernière courbe déterminent sur  $\mu I$  des segments proportionnels : on a alors <sup>(1)</sup>

$$\frac{\mu'\mu}{\mu H} = \frac{\mu M}{MI} = 2\lambda, \quad \text{d'où} \quad \mu H = \frac{\mu'\mu}{2\lambda}.$$

Prolongeons  $MO$  jusqu'à sa rencontre  $G$  avec  $\mu'\mu$ .

(1) MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive*, 2<sup>e</sup> édition, p. 203 et suivantes.

On a

$$\frac{\mu H}{\mu G} = \frac{\mu I}{\mu M}.$$

Nous avons écrit précédemment la valeur de ce dernier rapport; on a alors

$$\frac{\mu H}{\mu G} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda}.$$

Introduisant ici la valeur de  $\mu H$  trouvée plus haut, on obtient

$$\frac{\mu' \mu}{\mu G} = 2\lambda + 1.$$

Le théorème est alors démontré.

Pour appliquer ce théorème à l'ellipse, nous allons d'abord démontrer géométriquement un théorème qui se trouve dans le travail de M. Cesaro (1). Nous conservons la *fig. 1*, en supposant que (M) soit une ellipse dont les demi-axes sont  $a$  et  $b$  et que (O) ait pour rayon  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

*La polaire LE du point M de l'ellipse (M), par rapport à la circonférence (O) dont le rayon est égal à  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , rencontre la normale ME à l'ellipse en un point E tel que ME égale le rayon de courbure  $M\rho$  de l'ellipse en M.*

Puisque le rayon de (O) est  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , il résulte de cet énoncé que

$$OM \times OL = a^2 + b^2;$$

de là

$$OL - OM = \frac{a^2 + b^2 - OM^2}{OM}.$$

(1) Voir page 175 de ce Volume.

Menons le diamètre OD perpendiculairement à  $M\mu$ ,  
on a

$$\overline{OD}^2 + \overline{OM}^2 = a^2 + b^2.$$

On peut donc écrire  $(OL - OM)$  ou  $ML = \frac{\overline{OD}^2}{OM}$ .

Mais on sait que le rayon de courbure de l'ellipse en M  
est égal à  $\frac{\overline{OD}^2}{MP}$  ; on a alors

$$\frac{ML}{M\mu} = \frac{MP}{OM} = \frac{ML}{ME} :$$

donc  $ME = M\mu$ . Ce qu'il fallait démontrer.

CENTRE DE COURBURE DE LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE.  
— Pour avoir ce centre de courbure, il suffit d'appliquer  
le théorème précédent à l'ellipse. On trouve ainsi qu'on  
obtient le centre de courbure  $\mu'$  de la développée de  
l'ellipse (M) en prolongeant  $G\mu$  de trois fois sa lon-  
gueur. Ce qui est la construction due à Maclaurin.