NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON ROUSSEL

Solution de la question proposée au concours général en 1883

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 344-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__344_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1883;

PAR M. LÉON ROUSSEL,
Élève du lycée de Bar-le-Duc.

D'un point P *pris sur la normale en un point* A *d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds* B, C, D, E. 1° *On demande de trouver l'équation de la sphère* S *passant par les quatre points* B, C, D, E; 2° *de trouver le lieu des centres* I *de la sphère* S *quand le point* P *se déplace sur la normale au point* A, *ainsi que la surface engendrée par la droite* PI.

Soient α, β, γ les coordonnées du point P ; les coordonnées des points A, B, C, D, E sont données par les équations

$$\frac{\alpha - x}{-1} = p\frac{\beta - y}{y} = q\frac{\gamma - z}{z} = \lambda,$$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad x = \alpha + \lambda, \qquad y = \frac{p\beta}{p+\lambda}, \qquad z = \frac{q\gamma}{q+\lambda},$$

λ étant racine de l'équation du cinquième degré

$$(2) \qquad \frac{p\beta^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{q\gamma^2}{(q+\lambda)^2} = 2(\alpha+\lambda),$$

obtenue en portant les valeurs de x, y, z dans l'équation du paraboloïde. Appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A, λ_0 la racine correspondante, de telle sorte qu'on a

$$x_0 = \alpha + \lambda_0, \qquad y_0 = \frac{p\beta}{p+\lambda_0}, \qquad z_0 = \frac{q\gamma}{q+\lambda_0}.$$

Cela posé, soit

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0$$

l'équation d'une sphère que je suppose passer par les points B, C, D, E. Si j'exprime que cette sphère passe par l'un de ces points, donc les coordonnées sont données par les équations (1), j'obtiens

$$(4)\left\{\begin{aligned} &(\alpha+\lambda)^2 + \frac{p^2\beta^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{q^2\gamma^2}{(q+\lambda)^2} \\ &\qquad - 2A(\alpha+\lambda) - 2B\frac{p\beta}{p+\lambda} - 2C\frac{q\gamma}{q+\lambda} + D = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation en λ doit avoir, en commun avec l'équation (2), les quatre racines de cette dernière, autres que λ_0. Si donc je forme, avec les équations (2) et (4), une combinaison qui ne soit que du quatrième degré en λ, le produit de cette nouvelle équation par $\lambda - \lambda_0$ devra être identique, à un facteur constant près, à l'équation (2). Or cette combinaison est facile à former : il suffit de multiplier (2) par λ et d'ajouter membre à membre avec (4). On trouve ainsi

$$\frac{p\beta}{p+\lambda}(\beta - 2B) + \frac{q\gamma}{q+\lambda}(\gamma - 2C) \\ + (\alpha+\lambda)(\alpha - \lambda - 2A) + D = 0.$$

Multiplions donc cette équation rendue entière par $\lambda - \lambda_0$ et identifions avec l'équation (2), rendue aussi entière, en remarquant que le facteur constant d'identification est 2. On doit alors avoir

$$\begin{aligned} &2(\lambda - \lambda_0)[(\alpha+\lambda)(\alpha - \lambda - 2A)(p+\lambda)(q+\lambda) \\ &\qquad + D(p+\lambda)(q+\lambda) \\ &\qquad + q\gamma(\gamma - 2C)(p+\lambda) + p\beta(\beta - 2B)(q+\lambda)] \\ &\quad \equiv p\beta^2(q+\lambda)^2 + q\gamma^2(p+\lambda)^2 - 2(\alpha+\lambda)(p+\lambda)^2(q+\lambda)^2, \end{aligned}$$

quel que soit λ. Si je fais successivement $\lambda = -p$, $\lambda = -q$, j'obtiens

$$2B = \frac{\beta(p+q+2\lambda_0)}{2(p+\lambda_0)} = \frac{y_0(p+q+2\lambda_0)}{2p},$$

$$2C = \frac{\gamma(p+q+2\lambda_0)}{2(q+\lambda_0)} = \frac{z_0(p+q+2\lambda_0)}{2q}.$$

En égalant les termes du quatrième et du troisième degré en λ, on trouve

$$2A = p + q + x_0,$$
$$-D = (p+\lambda_0)(q+\lambda_0).$$

L'équation de la sphère est donc

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{yy_0(p+q+2\lambda_0)}{2p} - \frac{zz_0(p+q+2\lambda_0)}{2q} \\ - x(p+q+x_0) - (p+\lambda_0)(q+\lambda_0) = 0.$$

En mettant cette équation sous la forme

$$x^2+y^2+z^2-\frac{p+q}{z}\left(\frac{yy_0}{\gamma}+\frac{zz_0}{q}+2x\right)-xx_0$$
$$-\lambda_0\left(\frac{yy_0}{p}+\frac{zz_0}{q}+p+q+\lambda_0\right)-pq=0,$$

on voit qu'elle passe constamment par l'intersection d'une sphère fixe et d'un plan parallèle à un plan fixe. Donc le lieu du point I est la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère fixe sur le plan. Les équations de cette droite sont

$$\mathrm{ZX}=p+q+x_0,$$
$$\frac{p\mathrm{Y}}{y_0}=\frac{q\mathrm{Z}}{z_0}.$$

La droite PI s'appuie déjà sur deux droites fixes, la normale en A et la droite lieu du point I. D'ailleurs ses équations

$$\frac{x-(x_0-\lambda_0)}{\frac{p+q+x_0}{2}-(x_0-\lambda_0)}=\frac{y-y_0\frac{p+\lambda_0}{p}}{\frac{y_0(p+q+2\lambda_0)}{4p}-\frac{y_0(p+\lambda_0)}{p}}$$
$$=\frac{z-z_0\frac{q+\lambda_0}{q}}{\frac{z_0(p+q+2\lambda_0)}{4q}-\frac{z_0(q+\lambda_0)}{q}}$$

montrent qu'elle reste parallèle au plan fixe

$$\frac{y_0x+2py}{y_0(2q-2p-x_0)}=\frac{z_0x+2qz}{z_0(2p-2q-x_0)}.$$

Donc elle engendre un paraboloïde hyperbolique.