Nouvelles annales de mathématiques

E. Jaggi

Solution de la question proposée au concours d'agrégation en 1884

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 341-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__341_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1884;

PAR M. E. JAGGI.

On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P *et* Q, *et pour chacune desquelles la droite d'intersection de ces deux plans est axe de symétrie :*

1° *On considère tous les plans* R *tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole, et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre* S *tangentes à la fois à tous les plans* R ;

2° *Trouver le lieu des centres des surfaces* S *et déterminer la nature de chacune de ces surfaces suivant la position occupée par son centre;*

3° *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces* S *soient homofocales.*

Nous prendrons pour plans des xz et des yz les plans P et Q des deux coniques, et pour origine le milieu des deux centres.

Les équations des deux coniques seront

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{(z + z_0)^2}{d^2} - 1 = 0.$$

En exprimant que le plan

$$(\mathrm{R}) \qquad ux + vy + wz - 1 = 0$$

a ses traces tangentes aux deux coniques, nous avons les deux relations suivantes

$$f(u, w) = (wz_0 - 1)^2 - b^2 w^2 - a^2 u^2 = 0,$$
$$\varphi(v, w) = (wz_0 + 1)^2 + d^2 w^2 - c^2 v^2 = 0,$$

qui sont les équations des deux coniques en coordonnées tangentielles.

1° On voit immédiatement que les plans R sont tangents aux surfaces du second degré dont l'équation générale est

$$\mathrm{F}(u, v, w) = \lambda f(u, w) + \mu \varphi(v, w) = 0.$$

2° Le lieu des centres est une droite, car on sait qu'en général le lieu des centres des quadriques tangentes à huit plans est une droite. Ici, cette droite est l'axe des z; car, le système des plans étant symétrique par rapport à cet axe, les surfaces le sont aussi. L'analyse le donne aussi simplement : le centre étant le pôle du plan à l'infini, on a, entre ses coordonnées, les relations

$$\frac{x}{\mathrm{F}'_u(0)} = \frac{y}{\mathrm{F}'_v(0)} = \frac{z}{\mathrm{F}'_w(0)} = \frac{1}{\mathrm{F}'_t(0)},$$

d'où l'on tire

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} z_0.$$

Pour discuter la nature de la surface par rapport à la position de son centre, nous introduirons le z du centre dans l'équation en éliminant λ et μ. En appelant ζ ce nouveau paramètre, l'équation F s'écrit

$$\begin{aligned} 0 = {} & w^2[(b^2+d^2)\zeta - z_0(b^2-d^2-2z_0^2)] \\ & + 4wz_0\zeta - a^2u^2(z_0-\zeta) - c^2v^2(z_0+\zeta) + 2z_0. \end{aligned}$$

Nous poserons, pour abréger,

$$\zeta_1 = \frac{b^2-d^2-2z_0^2}{b^2+d^2} z_0.$$

Si $z_0 > b$, $\zeta_1 < -z_0$, ζ variant de $-\infty$ à ζ_1, la surface est un hyperboloïde; pour ζ_1, un paraboloïde hyperbolique; entre ζ_1 et $-z_0$, un hyperboloïde; pour $-z_0$, un cylindre; entre $-z_0$ et z_0, un hyperboloïde; pour z_0, un cylindre et au delà un hyperboloïde.

Si $z_0 < b$, de $-\infty$ à $-z_0$, la surface est un hyperboloïde; pour $-z_0$, un cylindre; entre z_0 et ζ_1, un ellipsoïde; pour ζ_1, un paraboloïde elliptique; au delà, un hyperboloïde, sauf pour z_0, pour laquelle la surface est un cylindre.

3° Pour exprimer la condition que les surfaces sont homofocales, je remarque qu'il suffit d'écrire que la développable circonscrite à toutes les quadriques passe par le cercle imaginaire de l'infini ou que les plans lui sont tangents.

Il suffit pour cela d'écrire que le plan

$$ux + vy + wz = 0$$

est tangent au cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

ce qui donne

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Cette équation, jointe aux deux suivantes,

$$(wz_0 - 1)^2 - b^2 w^2 - a^2 u^2 = 0,$$
$$(wz_0 + 1)^2 + d^2 w^2 - c^2 v^2 = 0,$$

doit laisser u, v, w variables. En formant l'équation en w qui en résulte et écrivant qu'elle se réduit à une identité, on a les conditions

$$z_0 = 0, \qquad c^2 = -a^2, \qquad d^2 = a^2 - b^2.$$

Les deux coniques ont alors pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2 - a^2} + 1 = 0.$$

On voit que, pour que la seconde conique soit une hyperbole, il est nécessaire de supposer $a^2 < b^2$ et qu'alors elle passe par les foyers de l'ellipse.