NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Solution des questions proposées au concours d'agrégation de 1883

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 332-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__332_0>

SOLUTION DES QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1883;

PAR M. MORET-BLANC.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Trouver la hauteur AB *et les bases* AD, BC *d'un trapèze rectangle* ABCD, *connaissant la longueur l du côté oblique* CD, *l'aire a^2 du trapèze et le volume $\frac{1}{3}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de* CD.

Discuter les formules trouvées et déterminer le minimum et le maximum de b^3. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a, \qquad l = 3a.$$

Prolongeons AB et DC jusqu'à leur rencontre en E; abaissons CF perpendiculaire sur AD et AH perpendiculaire sur DE.

Posons

$$AB = x, \qquad AD = y, \qquad BC = z,$$

et soit $y > z$.

Les triangles semblables ADE, CDF, ADH donnent

$$\frac{DE}{l} = \frac{y}{y-z}, \qquad \frac{AH}{x} = \frac{y}{l};$$

d'où

$$DE = \frac{ly}{y-z}, \qquad AH = \frac{xy}{l}.$$

On a

$$\text{vol. ADE} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AH}^2 \times DE = \frac{1}{3}\pi\frac{x^2y^3}{l(y-z)},$$

$$\text{vol. BCE} = \text{vol. ADE} \times \frac{z^3}{y^3}$$

et

$$\text{vol. ABCD} = \text{vol. ADE} - \text{vol. BCE} = \frac{1}{3}\pi\frac{x^2(y^3 - z^3)}{l(y - z)},$$

$$\text{vol. ABCD} = \frac{1}{3}\pi\frac{x^2(y^2 + yz + z^2)}{l}.$$

Cela posé, on a, d'après les données de la question,

$$(1) \qquad x^2 + (y - z)^2 = l^2,$$

$$(2) \qquad x(y + z) = 2a^2,$$

$$(3) \qquad x^2(y^2 + yz + z^2) = lb^3;$$

puis, par la combinaison de ces deux dernières équations,

$$(4) \qquad x^2yz = 4a^4 - lb^3,$$

$$(5) \qquad x^2(y - z)^2 = 4lb^3 - 12a^4 = 4(lb^3 - 3a^4).$$

On a la somme et le produit des deux quantités x^2 et $(y - z)^2$, qui sont les racines de l'équation

$$u^2 - l^2u + 4(lb^3 - 3a^4) = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{l^2 + \sqrt{l^4 - 16(lb^3 - 3a^4)}}{2},$$

$$(y - z)^2 = \frac{l^2 - \sqrt{l^4 - 16(lb^3 - 3a^4)}}{2}.$$

Le signe du radical se détermine en remarquant que, pour $lb^3 = 3a^4$, x ne saurait être nul, car alors l et b seraient aussi nuls, ainsi que a, et il n'y aurait plus de trapèze; on ne peut supposer nulles toutes les données.

On a alors

$$\frac{(y + z)^2}{(y - z)^2} = \frac{4a^4}{4(lb^3 - a^4)} = \frac{a^4}{lb^3 - 3a^4},$$

et, par suite,

$$(y + z)^2 = a^4\,\frac{l^2 - \sqrt{l^4 - 16(lb^3 - 3a^4)}}{2(lb^3 - 3a^4)}.$$

En extrayant les racines carrées des valeurs précédentes, on aura

$$x, \quad y+z \quad \text{et} \quad y-z,$$

et, par suite, y et z.

Discussion. — La réalité des valeurs de x, y, z exige que l'on ait

$$l^4 - 16 l b^3 + 48 a^4 > 0 \qquad \text{ou} \qquad b^3 < \frac{3a^4}{l} + \frac{l^3}{16}.$$

Les équations (4) et (5) montrent que, pour que x, y, z soient positifs, il faut que l'on ait

$$b^3 < \frac{4a^4}{l} \qquad \text{et} \qquad b^3 > \frac{3a^4}{l}.$$

La valeur minimum de b^3 est donc $\frac{3a^4}{l}$, et sa valeur maximum est la plus petite des deux limites $\frac{3a^4}{l} + \frac{l^3}{16}$ et $\frac{4a^4}{l}$; ce sera la première si $l < 2a$, et la seconde si $l > 2a$.

Pour $l = a$, on a le minimum $b^3 = 3a^3$,

$$x = y = z = a :$$

le trapèze est un carré; et le maximum $b^3 = 3a^3 + \frac{a^3}{16}$,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{5a\sqrt{2}}{4}, \qquad z = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Pour $l = 3a$, on a le minimum $b^3 = a^3$,

$$x = 3a, \qquad y = z = \frac{a}{3} :$$

le trapèze est un rectangle; et le maximum $b^3 = \frac{4a^3}{3}$,

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{13} + \sqrt{5}), \qquad y + z = y - z = \frac{a}{2}(\sqrt{13} - \sqrt{5}),$$

$$y = \frac{a}{4}(\sqrt{13} - \sqrt{5}), \qquad z = 0:$$

le trapèze se réduit à un triangle.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

D'un point donné P, *on mène des normales à un ellipsoïde donné :*

1° *Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre* S *concentriques à l'ellipsoïde;*

2° *Trouver le lieu que doit décrire le point* P *pour que les surfaces soient de révolution;*

3° *Déterminer le cône, lieu des axes de révolution des surfaces* S ;

4° *Sur la section de ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface* S *est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.*

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, équations de l'ellipsoïde, $a > b > c$;

x_0, y_0, z_0, coordonnées du point P.

En exprimant que la normale au point (x, y, z) de l'ellipsoïde passe par le point P, on a les équations

$$\frac{x_0 - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y_0 - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z_0 - z}{\frac{z}{c^2}} = k.$$

Tirant de ces équations les valeurs de x, y, z et les reportant dans celle de l'ellipsoïde, on a

$$\frac{a^2 x_0^2}{(a^2+k)^2} + \frac{b^2 y_0^2}{(b^2-k)^2} + \frac{c^2 z_0^2}{(c^2+k)^2} - 1 = 0,$$

équation du sixième degré en k. A chacune des valeurs de k correspond une normale : on peut donc, du point P, mener à l'ellipsoïde six normales réelles ou imaginaires.

1° Les équations de condition peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
M &= (b^2 - c^2)yz + c^2 z_0 y - b^2 y_0 z = 0,\\
N &= (c^2 - a^2)zx + a^2 x_0 z - c^2 z_0 x = 0,\\
P &= (a^2 - b^2)xy + b^2 y_0 x - a^2 x_0 y = 0.
\end{aligned}$$

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les pieds des six normales est

$$l\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + mM + nN + pP = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
&\frac{lx^2}{a^2} + \frac{ly^2}{b^2} + \frac{lz^2}{c^2} + m(b^2 - c^2)yz + n(c^2 - a^2)zx\\
&\quad + p(a^2 - b^2)xy + (pb^2 y_0 - nc^2 z_0)x\\
&\quad + (mc^2 z_0 - pa^2 x_0)y + (na^2 x_0 - mb^2 y_0)z - l = 0.
\end{aligned}$$

Pour que cette surface soit concentrique à l'ellipsoïde, il faut que les coefficients de x, y, z soient nuls, ce qui donne

$$\frac{m}{a^2 x_0} = \frac{n}{b_2 y_0} = \frac{p}{c^2 z_0};$$

et l'équation générale des surfaces du second ordre S passant par les pieds des six normales issues du point P, et concentriques à l'ellipsoïde, est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
S = \frac{lx^2}{a^2} + \frac{ly^2}{b^2} + \frac{lz^2}{c^2} + a^2(b^2 - c^2)x_0 yz&\\
+ b^2(c^2 - a^2)y_0 zx + c^2(a^2 - b^2)z_0 xy - l = 0.&
\end{aligned}\right.$$

Comme on peut donner à l une infinité de valeurs, il y a une infinité de ces surfaces.

2° On exprimera que la surface S est de révolution en écrivant qu'une surface du second ordre passant par son intersection avec la sphère concentrique

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0$$

peut se réduire au système de deux plans parallèles, ce qui exige que les trois plans du centre de la surface

$$S - \lambda\Sigma = 0,$$

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{l} 2\left(\dfrac{l}{a^2} - \lambda\right)x + c^2(a^2 - b^2)z_0 y + b^2(c^2 - a^2)y_0 z = 0, \\ c^2(a^2 - b^2)z_0 x + 2\left(\dfrac{l}{b^2} - \lambda\right)y + a^2(b^2 - c^2)x_0 z = 0, \\ b^2(c^2 - a^2)y_0 x + a^2(b^2 - c^2)x_0 y + 2\left(\dfrac{l}{c^2} - \lambda\right)z = 0 \end{array} \right.$$

se confondent, et, par suite, que l'on ait les relations

$$\frac{2\left(\dfrac{l}{a^2} - \lambda\right)}{c^2(a^2 - b^2)z_0} = \frac{c^2(a^2 - b^2)z_0}{2\left(\dfrac{l}{b^2} - \lambda\right)} = \frac{b^2(c^2 - a^2)y_0}{a^2(b^2 - c^2)x_0},$$

$$\frac{2\left(\dfrac{l}{a^2} - \lambda\right)}{b^2(c^2 - a^2)y_0} = \frac{c^2(a^2 - b^2)z_0}{a^2(b^2 - c^2)x_0} = \frac{b^2(c^2 - a^2)y_0}{2\left(\dfrac{l}{c^2} - \lambda\right)};$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \frac{2l}{a^2} - \frac{b^2c^2(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)y_0 z_0}{a^2(b^2 - c^2)x_0} \\ &= \frac{2l}{b^2} - \frac{c^2a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)x_0 z_0}{b^2(c^2 - a^2)y_0} \\ &= \frac{2l}{c^2} - \frac{a^2b^2(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)x_0 y_0}{c^2(a^2 - b^2)z_0}, \end{aligned}$$

et, en éliminant λ et chassant les dénominateurs,

$$(2)\quad \begin{cases} 2l(c^2-a^2)(a^2-b^2)y_0 z_0 = a^2 x_0[b^4(c^2-a^2)^2 y_0^2 - c^4(a^2-b^2)^2 z_0^2], \\ 2l(a^2-b^2)(b^2-c^2)x_0 z_0 = b^2 y_0[c^4(a^2-b^2)^2 z_0^2 - a^4(b^2-c^2)^2 x_0^2], \\ 2l(b^2-c^2)(c^2-a^2)x_0 y_0 = c^2 z_0[a^4(b^2-c^2)^2 x_0^2 - b^4(c^2-a^2)^2 y_0^2]. \end{cases}$$

Ces trois relations se réduisent à deux distinctes. Si on les ajoute après les avoir divisées respectivement par $a^2 x_0$, $b^2 y_0$, $c^2 z_0$, l est éliminé et l'on obtient, en chassant les dénominateurs,

$$(3)\quad \begin{cases} b^2 c^2(c^2-a^2)(a^2-b^2)y_0^2 z_0^2 \\ \quad + c^2 a^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)x_0^2 z_0^2 \\ \quad + a^2 b^2(b^2-c^2)(c^2-a^2)x_0^2 y_0^2 = 0, \end{cases}$$

équation du lieu que doit décrire le point P pour que la surface S soit de révolution : c'est un cône du quatrième ordre, ayant son sommet au centre de l'ellipsoïde.

Quand le point P décrit une génératrice de ce cône, x_0, y_0, z_0 varient proportionnellement, ainsi que l, en vertu des relations (2), et la surface S reste la même. Ainsi, *les pieds des normales, menées à l'ellipsoïde des différents points d'une génératrice du cône* (3), *sont situés sur une même surface de révolution.*

3° En remplaçant λ par sa valeur, l'équation du plan des centres des surfaces $S - \lambda(x^2+y^2+z^2-\rho^2) = 0$, qui est perpendiculaire à l'axe, peut s'écrire

$$\frac{x}{a^2(b^2-c^2)x_0} + \frac{y}{b^2(c^2-a^2)y_0} + \frac{z}{c^2(a^2-b^2)z_0} = 0;$$

les équations de l'axe sont donc

$$(4)\quad a^2(b^2-c^2)x_0 x = b^2(c^2-a^2)y_0 y = c^2(a^2-b^2)z_0 z.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0 entre ces équations et l'équation (3), on obtient celle du cône des axes

$$(5)\quad a^2(b^2-c^2)x^2 + b^2(c^2-a^2)y^2 + c^2(a^2-b^2)z^2 = 0.$$

4° Si l'on coupe ce cône par le plan $z = z_1$, la section

$$(6) \quad a^2(b^2 - c^2)x^2 + b^2(c^2 - a^2)y^2 + c^2(a^2 - b^2)z_1^2 = 0$$

est une hyperbole dont l'axe transverse se projette sur Oy et l'axe non transverse sur Ox.

Pour faire la distinction des points qui appartiennent aux axes des diverses surfaces de révolution, nous remarquerons que le cône est la limite entre les deux hyperboloïdes; le système de deux plans parallèles est la limite entre l'hyperboloïde de révolution à deux nappes et l'ellipsoïde de révolution aplati, et le cylindre entre l'hyperboloïde de révolution à une nappe et l'ellipsoïde de révolution allongé. Il suffit donc de chercher les points qui correspondent aux limites.

Pour que la surface **S** soit un cône, il faut que $l = 0$; l'équation de la surface se réduit à

$$a^2(b^2 - c^2)x_0yz + b^2(c^2 - a^2)y_0xz + c^2(a^2 - b^2)z_0xy = 0,$$

et, pour que cette surface soit de révolution, il faut que l'on ait

$$a^4(b^2 - c^2)^2x_0^2 = b^4(c^2 - a^2)^2y_0^2 = c^4(a^2 - b^2)^2z_0^2.$$

Les équations de l'axe deviennent alors

$$\pm x = \pm y = \pm z,$$

et, pour $z = z_1$,

$$x = \pm z_1, \qquad y = \pm z_1,$$

en tout quatre points.

Si la conique **S** est le système de deux plans parallèles, ses traces sur chacun des plans de coordonnées seront deux droites parallèles, et l'on aura

$$2l = \pm a^2bc(b^2 - c^2)x_0 = b^2ac(c^2 - a^2)y_0$$
$$= c^2ab(a^2 - b^2)z_0;$$

les équations de l'axe deviendront

$$\pm ax = \pm by = \pm cz.$$

et, pour $z = z_1$,

$$x = \pm \frac{c}{a} z_1, \qquad y = \pm \frac{c}{b} z_1.$$

On exprimera que la surface S est un cylindre en écrivant que les équations de l'axe vérifient les trois équations (A) des plans du centre. En remplaçant, dans les résultats, $2\left(\frac{l}{a^2} - \lambda\right)$, $2\left(\frac{l}{b^2} - \lambda\right)$, $2\left(\frac{l}{c^2} - \lambda\right)$ par leurs valeurs, et ayant égard aux équations (2), on a

$$\frac{x^2}{a^2c^2 + a^2b^2 - b^2c^2} = \frac{y^2}{b^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2}$$
$$= \frac{z^2}{a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2},$$

d'où, pour $z = z_1$,

$$x = \pm z_1 \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2) - b^2c^2}{c^2(a^2 + b^2) - a^2b^2}},$$
$$y = \pm z_1 \sqrt{\frac{b^2(a^2 + c^2) - a^2c^2}{c^2(a^2 + b^2) - a^2b^2}}.$$

En résumé, les points appartenant aux axes des surfaces de même espèce sont disposés symétriquement sur chacune des quatre demi-branches de l'hyperbole. En considérant celles dont les abscisses sont positives, ils se présentent dans l'ordre suivant :

De $x = 0$ à $x = \frac{c}{a} z_1$, ellipsoïdes de révolution aplatis ;

$x = \frac{c}{a} z_1$, système de deux plans parallèles ;

De $x = \frac{c}{a} z_1$ à $x = z_1$, hyperboloïdes à deux nappes ;

$x = z_1$, cône ;

De $x = z_1$ à $x = z_1\sqrt{\frac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{c^2(a^2+b^2)-a^2b^2}}$, hyperboloïdes à une nappe;

$x = z_1\sqrt{\frac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{c^2(a^2+b^2)-a^2b^2}}$, cylindre de révolution;

$x > z_1\sqrt{\frac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{c^2(a^2+b^2)-a^2b^2}}$, ellipsoïdes de révolution allongés.