NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST MALO

Solution géométrique de la question proposée au concours général de 1885

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 317-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__317_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885;

PAR M. ERNEST MALO,
Capitaine du Génie à Besançon.

Par le centre d'une surface du second ordre, on mène deux demi-diamètres rectangulaires OM, ON : *on propose de démontrer que l'ensemble des droites* MN *qui passent par un point fixe* I *forme un cône du second ordre et de trouver sous quelles conditions ce cône sera de révolution. On propose, en second lieu, de démontrer que toutes les droites* MN *qui sont dans un même plan* Π *sont tangentes à une même section conique et de trouver comment doit être choisi ce plan pour que cette conique soit une parabole ou un cercle.*

Je m'appuierai sur ce théorème connu :

La somme des inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires OM, ON *est constante.*

Comme, dans un triangle rectangle, la somme des inverses des carrés des côtés est égale à l'inverse du carré de la hauteur relative à l'hypoténuse, la droite MN enveloppe un cercle ayant son centre en O et un rayon égal à $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

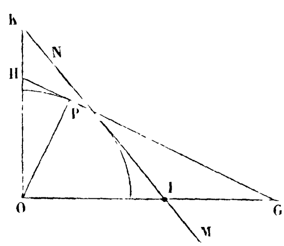
Réciproquement, si, entre les inverses des carrés de deux rayons, OM, ON, rectangulaires ou dirigés suivant la même droite, on a la relation

$$\frac{1}{\rho^2} \pm \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{h^2},$$

et si M décrit une conique ayant O pour centre, il en sera de même de N, et les deux coniques auront mêmes directions d'axes.

Cela rappelé, considérons un plan passant par la droite OI : ce plan coupera la surface du second ordre suivant une section conique à laquelle correspondra un

Fig. 1.



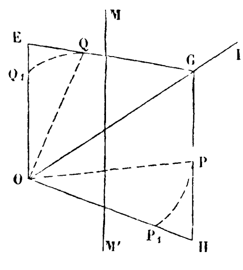
cercle enveloppe des droites MN de ce plan; par conséquent, il y aura deux de ces droites qui passeront par I et qui seront également inclinées sur OI, et, d'après ce qui précède, en désignant par OG le diamètre dirigé suivant OI et par OH le diamètre perpendiculaire, la relation

$$\frac{1}{\overline{OI}^2} + \frac{1}{\overline{OK}^2} = \frac{1}{\overline{OG}^2} + \frac{1}{\overline{OH}^2},$$

où OI et OG sont constants, oblige le point K à décrire une section conique ayant même centre et mêmes directions d'axes que la conique décrite par H lorsque le plan tourne autour de OI. Les droites MN menées par I sont donc sur un cône du second ordre, et, pour que ce cône soit de révolution, il faut que le rayon OP soit constant, c'est-à-dire que $\frac{1}{\overline{OG}^2} + \frac{1}{\overline{OH}^2}$ soit constant, et, comme OG est constant, que OH soit aussi constant. En d'autres termes, il faut que le point I ait été choisi sur l'axe de l'un des systèmes de plans de sections circulaires.

Si, au lieu de considérer les droites MN qui passent par un point, on considère celles qui sont dans un plan, il est clair qu'elles enveloppent une section conique, car, considérant un point I dans ce plan, on peut de ce point mener deux tangentes et deux seulement à l'enveloppe, puisque, d'après ce qui précède, le point I est le sommet d'un cône du second ordre qui sera coupé par le plan suivant deux génératrices et seulement deux. Je suppose maintenant que I soit sur la droite à l'infini

Fig. 2.



du plan. Le cône dégénère en un cylindre et la section droite de ce cylindre s'obtiendra en menant d'abord les trois diamètres rectangulaires : OG, dirigé suivant

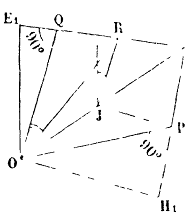
OI; OE, perpendiculaire à OI et parallèle au plan donné; OH, perpendiculaire à ce plan; puis les droites EG et HG, enfin les perpendiculaires OP et OQ que l'on rabattra en OP_1, OQ_1 suivant OE et OH; P_1 et Q_1 seront deux points de la section droite cherchée dont on connaît déjà le centre et les directions axiales, qui sont les mêmes que celles de la section EOH, de sorte qu'elle est complètement déterminée. La trace du plan sur le plan EOH est une droite MM' parallèle à OE, et, si l'enveloppe des droites MN est une parabole, un des points d'intersection M, M' de la droite MM' avec la section droite du cylindre OI est à l'infini, puisque l'on ne peut mener à une parabole qu'une tangente parallèle à une direction donnée. OE est donc une asymptote de la section droite du cylindre, c'est-à-dire que le segment OQ_1 est infini : cela exige que les segments OE et OG soient de même infinis, c'est-à-dire que le plan GOE coupe le cône asymptote de la surface suivant deux génératrices rectangulaires. On a donc l'énoncé suivant :

Les cordes d'une surface du second ordre, vues du centre sous un angle droit et situées dans un même plan, enveloppent une parabole lorsque la conique d'intersection du plan et de la surface est une hyperbole équilatère.

Je cherche maintenant à quelles conditions l'enveloppe des cordes MN situées dans un même plan Π sera un cercle. Une condition suffisante est évidemment, comme on l'a remarqué de prime abord, que le plan passe par le centre; mais cette condition n'est pas nécessaire. Les tangentes menées d'un point I du plan à l'enveloppe des cordes MN de ce plan sont, comme on l'a observé, les génératrices suivant lesquelles le cône des droites MN qui passent par I est coupé par le plan Π, et ces génératrices forment une conique évanouissante semblable à la conique de dimensions finies suivant laquelle le cône I est coupé par un plan parallèle à II. Si donc celle-ci est un cercle, l'autre sera un point-cercle doublement tangent à l'enveloppe des cordes MN du plan II, c'est-à-dire un des quatre foyers de cette enveloppe, qui sera un cercle si les foyers coïncident. Or il est facile de voir que, lorsque le point I se déplace sur une droite passant par l'origine OI, les directions des plans de sections circulaires du cône (I, MN) ne changent pas.

En effet, soient OG le diamètre passant par I, OH et OE les axes de la conique intersection de la surface avec le plan diamétral perpendiculaire à OI : le cône I coupera ce plan suivant une conique dont les axes OH_1,

Fig. 3.



OE_1 seront dirigés suivant OH et OE, comme on a vu, et s'obtiendront en décrivant les cercles de centre O et de rayons OP, OQ tangents à GH et à GE, puis en menant de I les tangentes à ces cercles. Les sections circulaires du cône I s'obtiendront ensuite en décrivant une sphère de centre O et de rayon OP; soit R un des points où cette sphère coupe IE_1 et soit J la projection de P sur OI; PJR est un plan de section circulaire et l'angle de JR avec OE_1 est manifestement égal à l'angle QOR. Le cosinus de cet angle étant mesuré par le rapport $\frac{OQ}{OP}$ qui est constant, la direction de JR est invariable, comme on l'avait annoncé. De là résulte la proposition suivante :

Si, du centre de la surface, on fait sur un plan quelconque la perspective des coniques, enveloppes des droites MN, *dans les plans parallèles au plan choisi, on obtient un système de coniques homofocales.*

En particulier, sur un plan de section circulaire les foyers réels du système seront le centre de la section et la projection du centre de la surface sur le plan. On voit aussi, et c'est ce qu'il importe surtout de remarquer, que si l'enveloppe des droites MN d'un plan Π est un cercle, il en sera de même pour tous les plans parallèles. Il suffit donc de trouver une seule position convenable pour Π. Or il est évident que, si l'on en a trouvé une, si un plan Π est situé convenablement par rapport à la surface donnée Σ, en construisant la figure à une échelle différente, on aura un plan Π' homologue de Π, qui sera également placé comme on le demande à l'égard de la surface Σ' homologue de Σ; mais tout plan Π parallèle à Π' est aussi convenablement situé par rapport à Σ' : on peut donc considérer, pour déterminer les conditions du problème, n'importe quelle surface homothétique à Σ, en particulier son cône asymptote. Mais, à l'égard de celui-ci, les plans qui le coupent suivant des génératrices rectangulaires enveloppent un cône du second ordre Γ dont il s'agit seulement de trouver les plans de sections circulaires, et c'est à quoi l'on parviendra sans difficulté de la même façon que ci-dessus.

En écrivant l'équation de la surface donnée sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

les équations des plans centraux appartenant aux systèmes cherchés seront

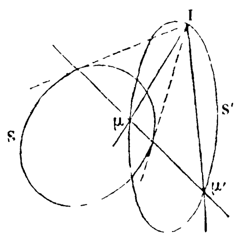
$$(A^2 - B^2)x^2 + (C^2 - B^2)z^2 = 0,$$
$$(B^2 - A^2)y^2 + (C^2 - A^2)z^2 = 0,$$
$$(A^2 - C^2)x^2 + (B^2 - C^2)z^2 = 0.$$

Si, comme on le suppose ordinairement, A, B, C sont rangés par ordre de grandeur croissante, les deux derniers systèmes sont imaginaires.

On peut aussi, pour déterminer les systèmes de plans Π, se servir de la méthode suivante, qui m'a été indiquée par M. le lieutenant-colonel du Génie Percin.

Deux points M et N, vus de l'origine sous un angle droit, sont conjugués par rapport à la sphère évanouissante ayant pour centre l'origine, et si la droite MN doit rester dans un plan Π, ces points M et N seront, en particulier, conjugués par rapport au cercle imaginaire suivant lequel ce plan Π coupe la sphère, cercle qui a pour centre la projection O_1 de O sur le plan Π et pour rayon $\overline{OO_1}\sqrt{-1}$. Ainsi, le problème de trouver l'enveloppe des droites MN vues du centre sous un angle droit et situées dans un plan Π est un cas particulier de celui où l'on se propose de trouver l'enveloppe des droites divisées harmoniquement par deux coniques S et S'. Cette enveloppe est une conique, comme on le sait d'ailleurs; mais les considérations suivantes l'établissent également. En effet, soit à trouver les droites MN qui passent par un point I de la conique S' : il suffit évidemment de prendre les points μ et μ' où la polaire de I par rapport à la conique S rencontre la conique S' et de les joindre au point I. Si μ et μ' coïncident, I est un point de l'enveloppe cherchée, et, comme la droite $\mu\mu'$ enveloppe une conique, polaire réciproque de S' par rapport à S, cela aura lieu quatre fois, puisque deux coniques admettent quatre tangentes communes. De tout cela résulte que l'enveloppe des droites MN ne peut être qu'une conique. Pour que cette conique soit un cercle, il faut, à supposer que S' soit un cercle aussi,

Fig. 4.



que deux de leurs points d'intersection soient les points circulaires à l'infini : ainsi, dans cette hypothèse, les polaires des points circulaires, prises par rapport à la conique S, touchent le cercle donné S'. Or ces polaires sont connues : ce sont les droites qui joignent le centre de S aux points de contact des tangentes issues des points circulaires, c'est-à-dire aux deux points situés sur la directrice de part et d'autre du grand axe à la distance $\pm \frac{\beta^2\sqrt{-1}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$, α et β désignant les demi-longueurs d'axes de la conique S. Puisque le cercle S' leur est tangent, son centre est sur l'axe : on voit donc d'abord que les plans Π cherchés sont parallèles à un axe principal de la surface donnée. En considérant ensuite la condition de distance, on trouve aisément que les plans Π doivent faire, avec la direction du diamètre conjugué, un angle ω défini par la relation

$$\tang\omega = -\frac{b^2}{\sqrt{a^4-b^4}},$$

a et b étant les axes de la section faite dans la surface par celui des plans Π qui passe par le centre. On trouve alors pour les équations des trois systèmes centraux

$$\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right) x^2 + \left(\frac{1}{c^4} - \frac{1}{b^4}\right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{a^4}\right) y^2 + \left(\frac{1}{c^4} - \frac{1}{a^4}\right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}\right) y^2 = 0,$$

comme précédemment.

La méthode qui vient d'être exposée est surtout commode pour étudier les généralisations qu'on peut tenter de donner du problème; par exemple, pour étudier la surface décrite par les droites MN qui s'appuient sur deux droites M′N′, M″N″, vues elles-mêmes du centre sous un angle droit, et les relations que cette surface, qui est du second ordre, a avec la surface donnée.

Note. — Nous avons reçu aussi, de M. Al. Aubry, élève du lycée de Lille, une excellente solution analytique.