Solution de la question d'algèbre proposée pour l'admission à l'École normale supérieure en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 314-317
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__314_1>

SOLUTION DE LA QUESTION D'ALGÈBRE PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1888.

Un polynôme $f(x)$ de degré n vérifie l'identité

$$n f(x) = (x-a) f'(x) + b f''(x).$$

1° *Chercher les coefficients de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $(x-a)$;*

2° *Chercher les conditions de réalité des racines;*

3° *Prouver que, si b_0 est la valeur absolue de b, les racines de $f(x)$ sont comprises entre*

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0}, \qquad a + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0}.$$

1° Le développement de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $x-a$, est

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a).$$

Les coefficients à chercher sont donc $f(a), f'(a), \ldots, f^n(a)$.

De l'identité

$$(1) \qquad n f(x) = (x-a) f'(x) + b f''(x),$$

on tire, par des dérivations successives, les identités

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} (n-1)f'(x) &= (x-a)f''(x) + bf'''(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (n-p+1)f^{p-1}(x) &= (x-a)f^{p}(x) + bf^{p+1}(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 2f^{n-2}(x) &= (x-a)f^{n-1}(x) + bf^{n}(x),\\ f^{n-1}(x) &= (x-a)f^{n}(x); \end{aligned}\right.$$

d'où, en remplaçant x par a,

$$\begin{aligned} nf(a) &= bf''(a),\\ (n-1)f'(a) &= bf'''(a),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (n-p+1)f^{p-1}(a) &= bf^{p+1}(a),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2f^{n-2}(a) &= bf^{n}(a),\\ f^{n-1}(a) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &f^{n-1}(a) = f^{n-3}(a) = f^{n-5}(a) = \ldots = 0,\\ &f^{n-2}(a) = \frac{b}{2}f^{n}(a),\\ &f^{n-4}(a) = \frac{b^2}{2.4}f^{n}(a),\\ &f^{n-6}(a) = \frac{b^3}{2.4.6}f^{n}(a),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et

$$f(x) = f^{n}(a)\left[\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{b}{2}\,\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b^2}{2.4}\,\frac{(x-a^{n-4}}{(n-4)!} + \frac{b^3}{2.4.6}\,\frac{(x-a)^{n-6}}{(n-6)!} + \ldots\right].$$

2° Si b est positif et si n est pair, tous les termes de $f(x)$ sont de même signe, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, et l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires.

Si b est positif et si n est impair, il suffit de supprimer le facteur $x-a$, commun à tous les termes de $f(x)$, pour être ramené au cas précédent. L'équation $f(x)=0$ n'a donc qu'une racine réelle a.

Si b est nul, l'équation $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles et égales à a.

Si b est négatif, les identités (1) et (2) montrent que la suite de Sturm, relative à $f(x)$, est complète et se compose des polynômes

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^n(x),$$

dont les premiers coefficients sont tous de même signe. L'équation $f(x)=0$ a donc toutes ses racines réelles et distinctes.

3° Quand l'équation $f(x)=0$ n'a qu'une racine réelle a, cette racine est évidemment comprise entre les nombres indiqués ; ces nombres se réduisent d'ailleurs à a quand l'équation a toutes ses racines égales à a ; il suffit donc d'examiner le cas où toutes les racines sont réelles et distinctes.

En groupant les termes deux par deux, à partir du premier, et en remplaçant b par $-b_0$, l'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}\left[\frac{(x-a^2)}{(n-1)n}-\frac{b_0}{2}\right]\\ &\quad+\frac{b_0^2}{2.4}\,\frac{(x-a)^{n-6}}{(n-6)!}\left[\frac{(x-a)^2}{(n-5)(n-4)}-\frac{b_0}{6}\right]\\ &\quad+\frac{b_0^4}{2.4.6.8}\,\frac{(x-a)^{n-10}}{(n-10)!}\left[\frac{(x-a)^2}{(n-9)(n-8)}-\frac{b_0}{10}\right]+\ldots=0.\end{aligned}$$

Le premier crochet sera positif si la fraction $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ est supérieure à $\frac{b_0}{2}$; mais alors tous les autres crochets le seront aussi, car le premier terme de chaque crochet est supérieur à $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ comme ayant un dénominateur plus petit, et le second terme est inférieur à $\frac{b_0}{2}$ comme ayant un dénominateur plus grand. Les puissances de $(x - a)$ qui précèdent chaque crochet, et le terme qui reste seul, si les termes de $f(x)$ sont en nombre impair, sont de même parité. Toute valeur de x qui satisfait à l'inégalité

$$\frac{(x-a)^2}{(n-1)n} - \frac{b_0}{2} > 0$$

rend donc tous les termes de $f(x)$ de même signe, et, par suite, ne peut être racine; il en résulte que les racines de $f(x)$ sont comprises entre celles de l'équation

$$\frac{(x-a)^2}{(n-1)n} - \frac{b_0}{2} = 0,$$

c'est-à-dire entre les nombres indiqués. Ch. B.