NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École polytechnique en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 305-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__305_0>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888.

On donne un quadrilatère plan OACB *et deux séries de paraboles : les unes tangentes en* A *à* AC *et ayant pour diamètre* OA, *les autres tangentes en* B *à* BC *et ayant pour diamètre* OB. *On demande :*

1° *Le lieu du point de contact* M *d'une parabole de la première série avec une de la seconde série ;*

2° *Indiquer, en laissant le triangle* OAB *invariable, dans quelle région du plan doit être placé le point* C *pour que le lieu soit une ellipse ou pour qu'il soit une hyperbole ;*

3° *Démontrer, dans l'hypothèse où* OACB *est un parallélogramme, que la tangente commune en* M *aux deux paraboles pivote autour du point de concours* K *des médianes du triangle* ABC ;

4° *Trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection* P *de la tangente en* M *aux deux paraboles avec l'autre tangente commune* ED *que l'on peut mener à ces deux courbes.*

Prenons OA pour axe des x et OB pour axe des y. Soient

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a'}-1=0, \qquad \frac{x}{b}+\frac{y}{b'}-1=0$$

les équations des droites AC et BC; les coordonnées α et β du point C ont pour valeurs

$$\alpha=\frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a'}}{\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{a'b'}}, \qquad \beta=\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b'}}{\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{a'b'}}.$$

1° Soient

$$(1)\qquad y^2 - 2\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a'}-1\right)=0,$$

$$(2)\qquad x^2 - 2\mu\left(\frac{x}{b'}+\frac{y}{b}-1\right)=0$$

les équations des deux séries de paraboles, λ et μ désignant des paramètres variables. Les coordonnées x et y d'un point M du lieu, substituées dans les équations (1) et (2), feront connaître les valeurs correspondantes de λ et de μ, et ces valeurs devront vérifier l'équation

$$(3)\qquad \frac{\lambda\mu}{ab}-\left(y-\frac{\lambda}{a'}\right)\left(x-\frac{\mu}{b'}\right)=0,$$

obtenue en égalant les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes en ce point. En écrivant qu'il en est ainsi, on trouve qu'un point du lieu satisfait à l'une ou à l'autre des équations

$$xy=0,$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{a'b'}\right)xy+\frac{2y}{a'}\left(\frac{x}{b'}+\frac{y}{b}-1\right)\\&\qquad+\frac{2x}{b'}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a'}-1\right)\\&\qquad-4\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a'}-1\right)\left(\frac{x}{b'}+\frac{y}{b}-1\right)=0\end{aligned}\right.$$

ou

$$(4')\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{2}{ab'}x^2+\left(\frac{3}{ab}+\frac{1}{a'b'}\right)xy+\frac{2}{a'b}y^2\\&\qquad-2\left(\frac{1}{b'}+\frac{2}{a}\right)x-2\left(\frac{1}{a'}+\frac{2}{b}\right)y+4=0.\end{aligned}\right.$$

L'axe des x correspond à l'hypothèse $\lambda=0$, qui réduit la parabole (1) au double axe des x, et l'axe des y à l'hypothèse $\mu=0$, qui réduit la parabole (2) au double axe des y. L'équation (4′) représente une courbe du second ordre. On voit immédiatement sur l'équation (4) que cette courbe passe par les points de rencontre de la droite AC avec l'axe des x et avec la droite

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a'b'}\right)x + \frac{2}{a'}\left(\frac{x}{b'} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0;$$

ou, en remplaçant, dans cette équation, $\frac{y}{a'}$ par sa valeur tirée de l'équation de AC, avec la droite

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a'b'}\right)x - 2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a'}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x - 2\alpha = 0.$$

On verrait de même que cette courbe passe par les points de rencontre de la droite BC avec l'axe des y et avec la droite

$$y - 2\beta = 0.$$

En faisant alternativement $y = 0$ et $x = 0$ dans l'équation (4), on trouve que cette courbe coupe l'axe des x en un second point dont l'abscisse est $2b'$ et l'axe des y en un second point dont l'ordonnée est $2a'$. On en connaît donc six points; elle est amplement déterminée.

2° Le genre de la conique (4) dépend du signe de l'expression

$$\delta = \frac{16}{aba'b'} - \left(\frac{3}{ab} + \frac{1}{a'b'}\right)^2,$$

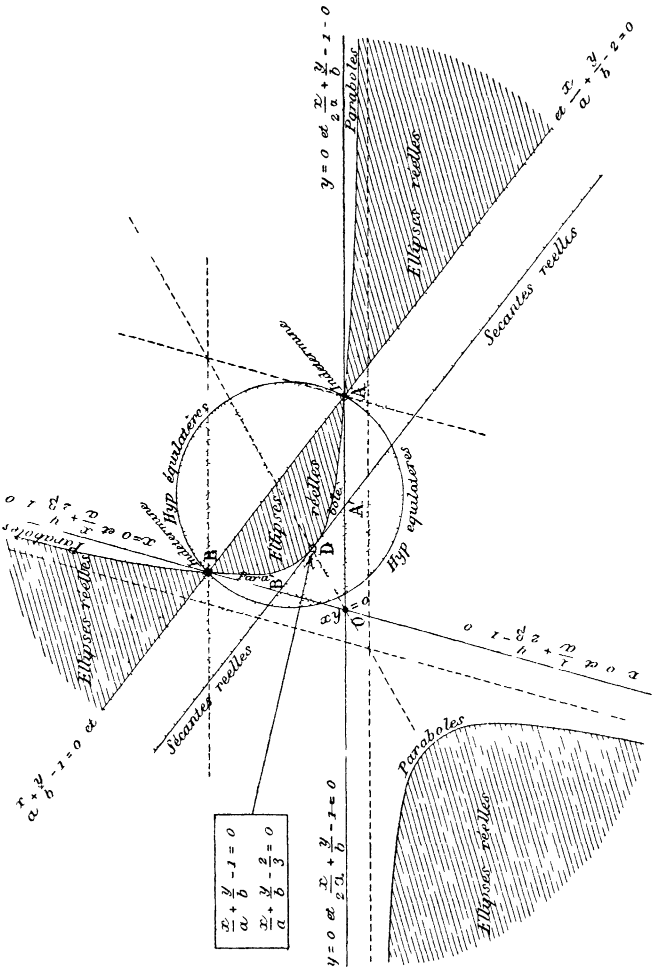
ou, en remplaçant $\frac{1}{a'}$ et $\frac{1}{b'}$ par leurs valeurs en α et β,

$$\delta = -\frac{(8\alpha\beta + b\alpha + a\beta - ab)(b\alpha - a\beta - ab)}{a^2 b^2 \alpha^2 \beta^2}.$$

La droite AB et l'hyperbole

$$(5) \qquad 8\alpha\beta + b\alpha + a\beta - ab = 0$$

séparent donc le plan en régions, telles que, si le point C est pris sur celles qui sont couvertes de hachures, la conique est du genre ellipse, si le point C est pris en dehors des hachures, la courbe est du genre hyperbole,



si le point C est pris sur la droite AB ou sur l'hyperbole (5), la courbe est du genre parabole.

L'espèce de la conique (4) dépend du signe de l'expression

$$\Delta = -2\left(\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'}\right) + \left(\frac{3}{ab} + \frac{1}{a'b'}\right),$$

ou, en remplaçant $\frac{1}{a'}$ et $\frac{1}{b'}$ par leurs valeurs en α et β,

$$\Delta = \frac{(2b\alpha + 2a\beta - ab)(b\alpha + a\beta - ab)}{a^2b^2\alpha\beta}.$$

La droite A′B′, la droite AB et les deux axes Ox et Oy séparent donc les régions précédentes en portions telles que, eu égard au signe du coefficient de x^2,

$$\frac{2}{ab'} = \frac{2(b-\beta)}{ab\alpha},$$

toutes les régions hachurées correspondent à des ellipses réelles, et les autres à des hyperboles. Les points situés sur A′B′ donnent des sécantes réelles, à l'exception du point D qui donne les deux parallèles

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{2}{3} = 0.$$

Les points situés sur AB donnent deux parallèles indépendantes de la position qu'ils occupent,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 = 0,$$

excepté les points A et B pour lesquels la conique (4) est indéterminée. Les points situés sur Ox donnent les deux droites

$$y = 0, \qquad \frac{x}{2\alpha} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$$

les points situés sur Oy donnent les deux droites

$$x = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{2\beta} - 1 = 0;$$

et enfin l'origine donne les deux axes.

Si l'on forme l'expression

$$\frac{\delta}{\Delta}\,\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}2(8\alpha\beta+b\alpha+a\beta-ab)\\ \quad\times\left[\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2-a\alpha-b\beta-\dfrac{\cos\theta}{2}(b\alpha+a\beta-ab)\right]\end{array}\right\}}{ab\sin^2\theta.\alpha^2\beta^2(2b\alpha+2a\beta-ab)},$$

et si l'on construit le cercle

$$\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2-a\alpha-b\beta-\frac{\cos\theta}{2}(b\alpha+a\beta-ab)=0,$$

qui passe par les points A et B et par les milieux des distances au point O des projections de chacun de ces points sur l'axe qui ne le contient pas, la région hyperbolique est partagée à son tour en portions telles que celles qui sont couvertes d'un semis correspondent à des hyperboles situées dans l'angle aigu de leurs asymptotes, et les portions blanches à des hyperboles situées dans l'angle obtus. Les points situés sur le cercle correspondent à des hyperboles équilatères, sauf ceux qui sont en même temps sur A'B' ou sur les axes, qui correspondent à des droites rectangulaires, et les points A et B déjà examinés.

3° Pour que le quadrilatère devienne un parallélogramme, il suffit de supposer a' et b' infinis. En désignant par x et y les coordonnées d'un point du lieu, l'équation (4), qu'elles vérifient, devient

$$\frac{3}{ab}xy-\frac{4}{a}x-\frac{4}{b}y+4=0$$

ou

$$(3x-4a)(3y-4b)=4ab,$$

de sorte qu'on peut exprimer les coordonnées du point M à l'aide d'un paramètre variable t par les deux équations

$$(6)\qquad 3y - 4b = 2at, \qquad 3x - 4a = \frac{2b}{t}.$$

En substituant ces valeurs de x et de y dans les équations (1) et (2), où $a' = b' = \infty$, on a

$$\lambda = \frac{2}{3}at(2b + at), \qquad \mu = \frac{2}{3}b\frac{b + 2at}{t^2},$$

de sorte que les équations des deux paraboles variables sont

$$(7)\qquad y^2 - \frac{4}{3}at(2b + at)\left(\frac{x}{a} - 1\right) = 0,$$

$$(8)\qquad x^2 - \frac{4}{3}b\frac{b + 2at}{t^2}\left(\frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

A l'aide de l'une ou de l'autre de ces équations, formons l'équation de la tangente au point M, dont les coordonnées sont données par les formules (6); on obtient

$$(9)\qquad y - \frac{2b}{3} = t\left(x - \frac{2a}{3}\right).$$

La tangente commune en M passe donc par le point indiqué, et, de plus, le paramètre t, choisi pour fixer les deux paraboles, se trouve être le coefficient angulaire de cette tangente commune.

4° Les coordonnées d'un point P de la tangente en M peuvent, d'après l'équation (9), s'exprimer à l'aide d'un paramètre variable θ, par les formules

$$(10)\qquad x - \frac{2a}{3} = \theta, \qquad y - \frac{2b}{3} = t\theta.$$

Une droite quelconque issue de ce point, m désignant son coefficient angulaire, aura pour équation

$$(11)\qquad y - \frac{2b}{3} - t\theta = m\left(x - \frac{2a}{3} - \theta\right).$$

Tirons de cette équation la valeur de x et portons-la dans l'équation (7), nous aurons une équation du second degré en y, et, en écrivant qu'elle a ses racines égales, nous aurons, pour déterminer les coefficients angulaires des tangentes issues du point P à la première parabole, l'équation

$$(a - 3\theta)m^2 + (2b + 3t\theta)m - t(2b + at) = 0.$$

qui doit admettre la racine t. En divisant le premier membre par $m - t$, on obtient, pour déterminer le coefficient angulaire de la seconde tangente, l'équation

$$(12) \qquad (a - 3\theta)m + (2b + at) = 0.$$

En tirant de l'équation (11) la valeur de y, en la portant dans l'équation (8) et en opérant comme précédemment, on a, pour déterminer les coefficients angulaires des tangentes issues du point P à la seconde parabole, l'équation

$$(b + 2at)m^2 - t^2(2a + 3\theta)m - t^2(b - 3t\theta) = 0,$$

qui doit admettre la racine t. En divisant le premier membre par $m - t$, on obtient, pour déterminer le coefficient angulaire de la seconde tangente, l'équation

$$(13) \qquad (b + 2at)m + t(b - 3t\theta) = 0.$$

Si l'on exprime que les équations (12) et (13) ont la même racine, on aura, pour déterminer θ, l'équation

$$t(b - 3t\theta)(a - 3\theta) - (b + 2at)(2b + at) = 0$$

ou

$$9t^2\theta^2 - 3(b + at)t\theta - 2(b + at)^2 = 0,$$

qui fera connaître deux valeurs de θ correspondant : l'une au point M, l'autre au point P. Cette équation résolue donne

$$\theta = \frac{2(b + at)}{3t}, \qquad \theta = -\,\frac{b + at}{3t}.$$

La première valeur, substituée dans les équations (10), donne les coordonnées (6) du point M; la seconde fait donc connaître les coordonnées du point P,

$$x = -\,\frac{b - at}{3t}, \qquad y = \frac{b - at}{3}.$$

En éliminant t entre ces deux dernières équations, on a l'équation du lieu décrit

$$3xy - bx - ay = 0.$$

C'est une hyperbole dont les asymptotes, parallèles aux axes, passent par le point de concours des médianes du triangle AOB; elle admet pour tangente à l'origine une parallèle à AB; elle est donc amplement déterminée.

En substituant la valeur trouvée pour θ dans l'une ou l'autre des équations (12) et (13), on obtient

$$m = -\,t\,\frac{2b + at}{b + 2at},$$

et, en remplaçant m et θ par ces valeurs dans l'équation (11), on a l'équation de la tangente commune DE

$$3t(2b + at)x + 3(b + 2at)y + (b - at)^2 = 0.$$

En l'ordonnant par rapport à t,

$$a(3x + a)t^2 + 2(3bx + 3ay - ab)t + b(3y + b) = 0,$$

on voit qu'elle enveloppe la courbe

$$(3bx + 3ay - ab)^2 - ab(3x + a)(3y + b) = 0$$

ou

$$b^2x^2 + abxy + a^2y^2 - ab^2x - a^2by = 0.$$

C'est une ellipse circonscrite au triangle AOB, ayant pour tangente à l'origine une parallèle à AB, et dont le centre est au point de concours des médianes du triangle AOB; elle est donc amplement déterminée.

Ch. B.