NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. FONTANEAU

Coniques polaires d'un point et d'une droite

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 292-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__292_1>

CONIQUES POLAIRES D'UN POINT ET D'UNE DROITE;

PAR M. E. FONTANEAU.

Soient

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation d'une conique C et X, Y les coordonnées d'un point fixe P. La détermination des tangentes menées du point à la courbe résulte, comme on le sait, de l'équation

$$(2) \qquad (Y - y)\frac{df}{dy} + (X - x)\frac{df}{dx} = 0$$

combinée avec l'équation (1).

Il est d'usage d'en déduire pour la polaire du point P cette équation

$$(3) \qquad X\frac{df}{dx} + Y\frac{df}{dy} + Z\frac{df}{dz} = 0;$$

mais on néglige d'indiquer à quelle courbe correspond l'équation (2) quand on y considère x, y comme les coordonnées courantes sans employer les coordonnées homogènes.

Or on voit immédiatement que cette courbe du second ordre résulte de l'intersection des rayons homologues des deux faisceaux définis par les relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} y - \mathrm{Y} - m(x - \mathrm{X}) = 0, \\ \dfrac{df}{dx} + m\dfrac{df}{dx} = 0. \end{array}\right.$$

Dans le système des coordonnées cartésiennes, on obtient, par ce mode de génération, le lieu des milieux des cordes interceptées par la conique C sur les sécantes menées du point P.

Si l'on interprète les mêmes équations dans le système plus général des coordonnées ponctuelles de Chasles (*Géométrie supérieure,* Chap. XXIII), la courbe en question S résulte du tracé suivant :

Étant donnée dans le plan de la conique C, outre le point P, une droite quelconque D, si par le point P on mène une transversale qui rencontre la conique C aux points a et b et la droite D au point n, puis qu'on détermine le conjugué harmonique m du point n par rapport aux points a et b, la courbe S sera le lieu des points m lorsque la transversale se déplace en tournant autour du point P. De là résultent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Deux droites déterminent par leurs pôles pris par rapport à une conique et par leurs points d'intersection avec elle les sommets d'un hexagone inscriptible à une courbe du second ordre.*

Si les deux droites se coupent sur la conique, il en résulte cette proposition :

Théorème II. — *Lorsqu'un triangle est inscrit dans* *une conique, toute transversale menée par le pôle de l'un des côtés est divisée harmoniquement par les deux autres côtés du triangle et par la conique.*

Si l'une des droites passe par le pôle de l'autre :

Théorème III. — *La polaire d'un point quelconque d'une droite donnée passe par le pôle de cette droite.*

Théorème IV. — *Toute sécante menée par un point est divisée harmoniquement par le point, sa polaire et la conique.*

Du principe de dualité, ou de l'interprétation des équations (2) et (4) dans le système de coordonnées tangentielles de Chasles (*Géométrie supérieure,* Chap. XXIV), on déduit les propositions suivantes :

Théorème V. — *Deux droites quelconques déterminent, par elles-mêmes et par les tangentes aux points où elles coupent une conique, les côtés d'un hexagone circonscriptible à une courbe du second ordre.*

Théorème VI. — *Lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, tout point pris sur la polaire d'un des sommets est le centre d'un faisceau harmonique que l'on obtient en joignant ce point aux deux autres sommets du triangle et menant les deux tangentes à la conique.*

Théorème VII. — *Le pôle d'une droite qui passe par un point est sur la polaire de ce point.*

Théorème VIII. — *Tout point pris sur une droite est le centre d'un faisceau harmonique composé de la droite donnée, de celle qui unit le point donné au pôle de la droite et des deux tangentes à la conique menées par le point donné.*

Cette méthode s'étend aux surfaces du second ordre et pourrait donner lieu à d'autres conséquences sur lesquelles je n'insiste pas pour ne pas allonger cette Note au delà de son importance.