NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. FARJON

Note sur une propriété du cercle des neuf points

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 288-292

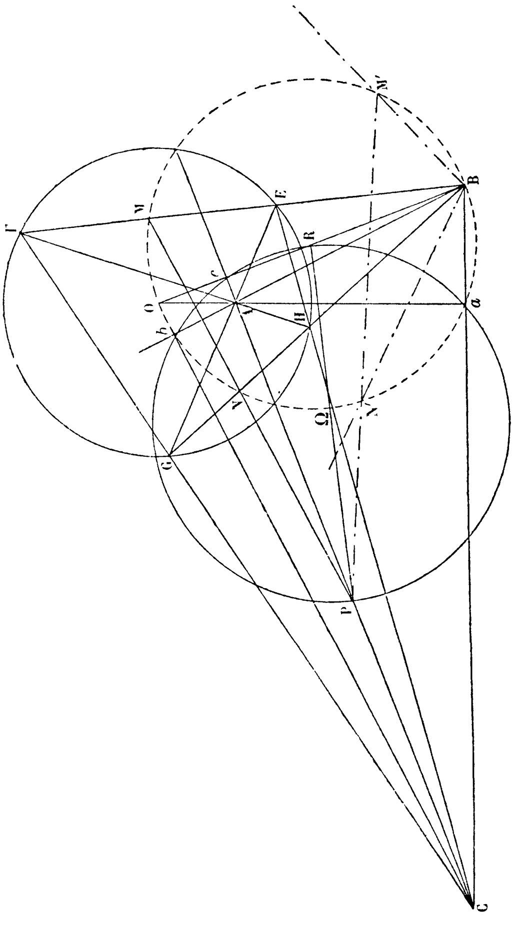
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__288_1>

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DU CERCLE DES NEUF POINTS;

PAR M. F. FARJON.

Soit ABC un triangle obtusangle en A; on peut considérer les trois points A, B, C comme les points d'intersection des diagonales et des côtés opposés d'une infinité de quadrilatères inscrits dans un cercle Σ ayant son centre au point de concours O des hauteurs et un rayon ρ tel que $\rho^2 = \mu\alpha$, μ et α étant les deux segments que détermine le point O sur l'une quelconque des hauteurs.

De ces quadrilatères, les uns sont réels, les autres imaginaires, mais certains éléments de ceux-ci sont toujours réels. Considérons une sécante BEF menée par le point B, elle détermine un quadrilatère EFGH inscrit



dans Σ. Décrivons sur OB comme diamètre un cercle, ce cercle passe par les milieux M et N des côtés opposés EF et GH; la droite MN, en vertu d'un théorème connu, passe par le milieu P de AC : le milieu de MN est le centre de gravité des quadrilatères.

Lorsque la sécante issue du point B cesse de couper Σ, le quadrilatère est imaginaire; le point M′ où elle rencontre le cercle OB est le milieu réel du côté correspondant. Si l'on joint M′P, on rencontre le cercle OB en un second point N′, milieu réel du côté opposé, et le centre de gravité est le milieu de M′N′.

Tous les quadrilatères considérés, réels ou imaginaires, ont donc leurs centres de gravité réels. *Le lieu de ces centres de gravité est le cercle Ω des neuf points du triangle* ABC.

Soient *a*, *b*, *c* les pieds des trois hauteurs. L'arc *bca* du cercle Σ comprend les centres de gravité de tous les quadrilatères engendrés par une sécante tournant autour du point B, l'arc *abc* ceux des quadrilatères engendrés par une sécante tournant autour du point C, l'arc *bc*, ceux des quadrilatères (tous réels) engendrés par une sécante tournant autour du point A. L'arc *bc*, commun aux deux précédents, est le seul qui corresponde à des quadrilatères réels.

Si le triangle ABC est acutangle, le cercle Σ est imaginaire, tous les quadrilatères définis ci-dessus sont imaginaires, mais la construction du centre de gravité s'applique de la même manière et donne toujours un point réel *dont le lieu est le cercle des neuf points*. On peut, dans ce dernier cas, donner une interprétation du cercle Σ en appliquant le procédé indiqué par Chasles (*Géométrie supérieure*, 790-795). Au point O de concours des hauteurs, élevons une perpendiculaire OS au plan égale à $\sqrt{-\mu\alpha}$, quantité qui, dans l'hypothèse, est réelle. Le point S est le sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par les sommets A, B, C. Ce trièdre est assez intéressant à étudier et permet de trouver certaines propriétés des triangles.

Je n'en citerai qu'un exemple :

Le théorème de Stewart est ainsi conçu : Le carré de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit au cercle est égal à la somme des carrés des tangentes menées de ces deux points de concours à la circonférence du cercle. Dans le triangle obtusangle ABC, le théorème de Stewart ne concerne que le côté BC. Mais, si l'on considère que le carré de la tangente imaginaire menée au cercle par un point intérieur est égal au produit négatif des deux segments d'une des sécantes menées par ce point, on démontrera sans difficulté que le théorème s'applique tout aussi bien à chacun des côtés AB et AC.

Si le triangle est acutangle, Σ devient imaginaire: on sait qu'alors le théorème du produit constant des deux segments des sécantes issues d'un même point, produit toujours positif, cette fois, subsiste (Chasles, *Géométrie supérieure,* 790). En considérant ce produit comme égal au carré de la tangente, on reconnaît sans peine que le carré d'un côté du triangle est égal à la somme des carrés des tangentes menées au cercle Σ par ses deux extrémités.

Le théorème de Stewart peut donc être mis sous cette forme beaucoup plus générale : *Dans un triangle quelconque, le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux tangentes menées de ses extrémités au cercle* Σ.

Revenons au trièdre trirectangle S, pour le cas du triangle acutangle, et nous allons voir tous nos éléments imaginaires disparaître et faire place à des éléments réels.

En effet, dans ce cas, le carré de la tangente menée du sommet A à Σ

$$t^2 = \overline{AO}^2 - \rho^2;$$

mais

$$\rho^2 = -\overline{SO}^2,$$

donc

$$t = SA;$$

de même la tangente menée du sommet B

$$t' = SB$$

et, dans le triangle SAB, on a

$$\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 = \overline{AB}^2.$$