NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIOCHE

Sur les minima de sommes de termes positifs dont le produit est constant

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 287-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__287_1>

SUR LES MINIMA DE SOMMES DE TERMES POSITIFS DONT LE PRODUIT EST CONSTANT;

PAR M. CH. BIOCHE,
Professeur au lycée de Douai.

Le théorème sur le maximum d'un produit de facteurs positifs dont la somme est constante a une réciproque relative au minimum de la somme des termes positifs dont le produit est constant. Pour démontrer cette réciproque il y a, je crois, avantage à se servir de la remarque suivante.

Le théorème sur le maximum d'un produit de n facteurs positifs $x, y, z, \ldots$, lorsque

$$x + y + z \ldots = a,$$

se traduit par l'inégalité

$$xyz \ldots \leq \left(\frac{a}{n}\right)^n,$$

qu'on peut écrire

$$xyz\ldots \leqq \left(\frac{x+y+z+\ldots}{n}\right)^n,$$

l'inégalité se transformant en égalité si $x=y=z\ldots$. Cette inégalité exprime à la fois :

1° Que, si la somme est donnée, le produit a un maximum;

2° Que, si le produit est donné, la somme a un minimum dans le cas de l'égalité des facteurs.

On a de même

$$x^m y^n z^p \leqq \left(\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)^{m+n+p} \times m^m \times n^n \times p^p,$$

qui donne le minimum de $x+y+z$ si $x^m y^n z^p$ est constant, ce minimum ayant lieu lorsque

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$