Nouvelles annales de mathématiques

Gaston-Henri Niewenglowski

Solution de la question proposée en philosophie au concours général de 1884

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 252-255

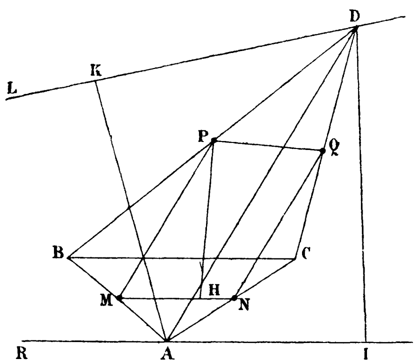
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__252_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE EN PHILOSOPHIE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1884;

PAR M. GASTON-HENRI NIEWENGLOWSKI,
Élève de Philosophie au lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Lignières).

Étant donnés un triangle ABC (*fig.* 1) *et une droite* L *qui n'est pas située dans le plan du triangle, on*

Fig. 1.



joint aux points B, C *un point quelconque* D *de la droite* L, *de manière à former un quadrilatère* DBAC *dont les côtés ne sont pas nécessairement dans un même plan :*

1° *Démontrer que le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des côtés du quadrilatère* DBAC *est un parallélogramme ;*

2° *Étudier les variations de la surface de ce parallélogramme ;*

3° *Trouver la position que le point* D *doit occuper sur la droite* L *pour que le parallélogramme soit un rectangle ou un losange ;*

4° *Examiner si le parallélogramme peut devenir un carré.*

1° Soient M, N, P, Q les milieux des côtés; les droites MN et PQ étant toutes deux parallèles à BC et égales à la moitié de BC, le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

2° Si nous prenons MN pour base, en abaissant PH perpendiculaire sur MN, l'expression de la surface sera

$$S = MN \times PH.$$

La longueur de la droite PH variant seule avec la position du point D sur L, les variations de la surface sont proportionnelles à celles de PH. Par le point A menons la parallèle R à BC, et abaissons DI perpendiculaire sur R. Les deux triangles PMH et DAI rectangles en H et en I, et ayant leurs angles aigus en M et en A égaux (côtés parallèles et dirigés dans le même sens) sont semblables et donnent

$$\frac{PH}{DI} = \frac{PM}{DA} = \frac{1}{2},$$

ce qui montre que les variations de PH, et par suite de S, sont proportionnelles aux variations de DI.

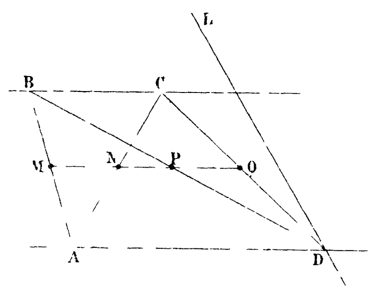
Il est facile de voir que la surface S n'a pas de maximum.

Elle sera maximum quand DI sera perpendiculaire à la fois sur L et sur R. Dans le cas où la droite L est parallèle au plan du triangle ABC, la perpendiculaire commune est aussi perpendiculaire au plan du triangle ABC.

Dans le cas où L est parallèle à R, DI est constant et la surface est aussi constante, quelle que soit la position du point D; dans ce cas, le parallélogramme s'allonge indéfiniment.

Enfin, lorsque la droite L se confond avec la droite R, il est facile de voir que les quatre points M, N, P, Q

Fig. 2.



sont en ligne droite et S prend alors une valeur nulle (*fig.* 2).

Il en est de même quand, la droite L coupant la droite R, le point D prend la position de leur intersection.

3° Le parallélogramme MNPQ sera un rectangle quand il aura un de ses angles droit, PMN par exemple. Mais alors PH se confondra avec PM, et par suite DI se confondra aussi avec DA. La position du point D sera donc donnée par l'intersection de la droite L et du plan mené par A perpendiculairement à R.

Le parallélogramme MNPQ sera un losange quand les diagonales DA, BC du quadrilatère primitif seront égales. Pour avoir la position du point D, on décrira du point A comme centre avec AD = BC une sphère qui coupera L en D et D′ ou en D, ou ne la coupera pas. Selon que le rayon AD ou BC sera supérieur, égal ou inférieur à la longueur de la perpendiculaire AK abaissée du point A sur L, on aura 2, 1 ou 0 solutions.

4° Pour que le parallélogramme MNPQ soit un carré, il faut qu'il soit à la fois un losange et un rectangle. Le point D devra donc être :

1° Sur la droite L et sur le plan mené par A perpendiculairement à L;

2° Être tel que DA = BC.

Sa position sera donc donnée par le point de rencontre de la droite L et du cercle décrit dans le plan mené par A perpendiculairement à L, du point A comme centre et avec un rayon AD = BC. Selon que la droite L coupera, touchera ou ne rencontrera pas le cercle AD, il y aura 2, 1 ou 0 positions du point D répondant à la question.