Quelques remarques géométriques à propos de la question précédente

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 248-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__248_1>

QUELQUES REMARQUES GÉOMÉTRIQUES A PROPOS DE LA QUESTION PRÉCÉDENTE;

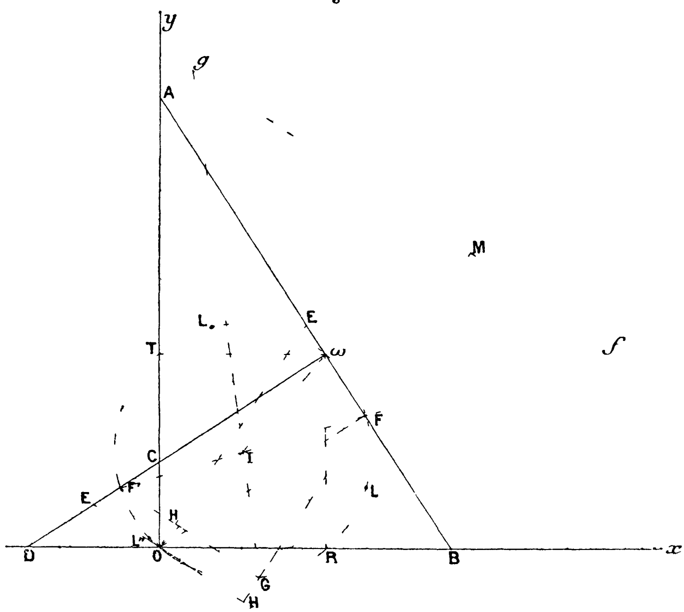
PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Le pied F (*fig.* 1) de la perpendiculaire abaissée de O sur AB est le foyer de la parabole P. De même F′ est le foyer de la parabole P′. Cette construction des foyers montre que *les foyers* F, F′ *des paraboles* P, P′, *lorsque* AB *tourne autour de* ω, *appartiennent à la circonférence* I *décrite sur* Oω *comme diamètre; la distance* FF′ *de ces foyers est égale à* Oω, *c'est-à-dire constante.*

Prenons les milieux E, E′ des segments AB, CD : la droite OE est un diamètre de P et OE′, un diamètre de P′. Les droites OE, OE′ sont à angle droit. L'axe de P est la parallèle FG à OE et l'axe de P′ est la parallèle F′G à OE′. On voit tout de suite que *les axes des paraboles* P, P′ *sont à angle droit; le point de rencontre* G *de ces axes appartient à la circonférence* I.

Les directrices des paraboles passent par le point O, qui est le sommet d'angles droits circonscrits à ces courbes. La directrice de P est OE′ perpendiculaire à l'axe FG et la directrice de P′ est OE perpendiculaire à l'axe F′G. Les points de rencontre des directrices avec les axes sont alors les projections H, H′ de O sur les axes FG, F′G, donc : *le lieu des points de rencontre des axes*

Fig. 1.



et des directrices est la podaire de O *par rapport à l'enveloppe des axes de* P *et de* P′.

Occupons-nous de cette enveloppe. L'axe FG et la droite FB sont également inclinés sur Ox, de même pour F′G et F′D.

La courbe enveloppe des axes est donc l'enveloppe de droites partant des extrémités de cordes de I, issues de ω, et qui font avec Ox des angles respectivement égaux aux angles de ces cordes avec cette droite.

Si l'on fait tourner ωF d'un certain angle autour de ω, la droite FG tourne d'un angle égal. La mesure de ce dernier angle est la moitié de l'arc parcouru par G diminué de la moitié de l'arc parcouru par F. L'angle que décrit la corde ωF a pour mesure la moitié de l'arc parcouru par F. En égalant ces deux mesures, on voit que *l'arc parcouru par* G *est double de l'arc parcouru par* F.

Par suite, *l'enveloppe des axes des paraboles est une hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite à la circonférence* I.

Lorsque, en vertu du déplacement de l'axe FG, les points F et G sont venus se confondre en L, l'arc GL est égal à deux fois l'arc FL ; de même pour L', l'arc GOL' est égal à $2FL'$.

Relativement à l'axe $F'G$, que l'on déplace de façon que F' et G viennent se confondre, on a L'' tel que l'arc $G''L''$ est égal à $2F'L''$ et aussi le point L' tel que l'arc $G\omega L'$ est égal à $2F'L'$.

Il est donc facile de construire les points L, L', L'' qui sont, comme nous allons le voir, les points de contact de l'hypocycloïde avec I (¹).

Appelons M le point où FG touche son enveloppe et $d\varphi$ l'angle infiniment petit dont tourne ωF autour de ω. Élevons en M la perpendiculaire à MF ; cette droite rencontre en g et f les rayons GI, FI de la circonférence I.

L'arc parcouru par G, pour un déplacement infiniment petit de FG, est égal à $Gg\,d\varphi$; de même l'arc parcouru par F est égal à $Ff\,d\varphi$. Mais le premier de ces arcs est double de l'autre : donc $Gg = 2Ff$.

Les triangles gMG, fMF étant semblables, on a alors

(¹) On détermine aussi L, L′, L en partageant en trois parties égales les arcs sous-tendus par les cordes OR, OT perpendiculaires à Ox, Oy.

aussi $MG = 2MF$. Cela montre que *l'on obtient le point* M *où* FG *touche son enveloppe en prolongeant* GF *de sa propre longueur*.

D'après cela, *lorsque la corde* FG *devient la tangente en* L *à* I *le point* L *est le point de contact de l'hypocycloïde avec* I. De même pour L′ et L″. La construction de L, L′, L″ montre facilement que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral ([1]).

Si la droite telle que AB menée par ω fait avec les axes un triangle isoscèle, la perpendiculaire abaissée sur cette droite est l'axe de la parabole correspondante. Cet axe, bissectrice de l'angle xoy, est l'une des tangentes menées de l'origine à l'hypocycloïde. L'autre bissectrice de l'angle xoy est une autre tangente à cette courbe. La troisième tangente est la droite symétrique, par rapport aux axes, de la droite Oω.

La perpendiculaire élevée du point O à cette dernière droite est tangente en O à la podaire de ce point par rapport à l'hypocycloïde. Les deux autres tangentes en O à cette courbe sont aussi les bissectrices des angles des axes.

Puisque le lieu des points, tels que G, point de rencontre des axes FG, F′G, est la circonférence I, on peut dire : *la circonférence* I *est le lieu des sommets d'angles droits circonscrits à l'hypocycloïde à trois rebroussements*.

On peut ajouter, en s'appuyant sur la construction du point M, que *les cordes de contact de ces angles droits ont leurs points milieux sur la circonférence* I.

La tangente en M à l'hypocycloïde rencontre I de fa-

([1]) Les points L, L′, L″ répondent à cette question : *déterminer un point* L *tel que la corde* ωL *et la tangente en* L *à* I *soient également inclinées sur* Ox.

çon que FM = GF, et cela constamment lorsqu'on déplace FG; de là résulte que *le centre de courbure de l'hypocycloïde à trois rebroussements s'obtient en prolongeant gf de sa propre longueur.*

Ou encore, puisque *g*M est double de M*f* : *ce centre de courbure s'obtient en prolongeant* M*f de trois fois sa longueur.*