NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BARISIEN

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 244-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__244_0>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1887 (¹);

PAR M. E. BARISIEN.

1° Soient a et b les coordonnées du point ω par rapport aux axes Ox et Oy. L'équation de la droite $A\omega B$ est de la forme

$$(1) \qquad y - b = m(x - a).$$

Celle de la droite perpendiculaire ωCD est

$$(2) \qquad y - b = -\frac{1}{m}(x - a).$$

L'équation générale des coniques tangentes aux points d'intersection de la droite AB avec le système des deux droites Ox et Oy est de la forme

$$[y - b - m(x - a)]^2 - 2\lambda xy = 0$$

ou, en développant,

$$y^2 + m^2x^2 - 2(m + \lambda)xy + 2(y - mx)(ma - b) + (ma - b)^2 = 0.$$

Exprimons que cette conique est une parabole : nous aurons entre λ et m la relation

$$m(2m + \lambda) = 0;$$

d'où

$$\lambda = -2m.$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. VI, p. 325.

L'équation de la parabole tangente en B et A aux axes Ox et Oy est donc en fonction du seul paramètre m,

$$(3) \qquad (y + mx)^2 + 2(y - mx)(ma - b) + (ma - b)^2 = 0.$$

L'équation de l'axe de cette parabole P est de la forme

$$y + mx + \mu = 0,$$

et celle de la tangente au sommet de la forme

$$my - x + \nu = 0,$$

de telle sorte que l'on peut écrire l'équation de la parabole de la façon suivante

$$(4) \qquad (y + mx + \mu)^2 = 2\rho(my - x + \nu),$$

les quantités μ, ρ, ν restant à déterminer par l'identification des équations (3) et (4). Cette identification fournit les trois relations

$$\begin{aligned} \mu - m\rho &= ma - b, \\ \mu m + \rho &= - m(ma - b), \\ \mu^2 - 2\rho\nu &= (ma - b)^2, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$\begin{aligned} \mu &= (ma - b)\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \\ \rho &= -\frac{2m(ma - b)}{1 + m^2}, \\ \nu &= \frac{m(ma - b)}{1 + m^2}. \end{aligned}$$

L'équation de l'axe de la parabole (3) est donc

$$(5) \qquad y + mx + (ma - b)\frac{1 - m^2}{1 + m^2} = 0.$$

Quant à la directrice, comme elle est perpendiculaire à l'axe et qu'elle passe par le point O, puisque les tangentes issues de ce point sont rectangulaires, son équation est

$$(6) \qquad my - x = 0.$$

En changeant dans les équations (5) et (6) m en $-\frac{1}{m}$, on obtiendra les équations de l'axe et de la directrice de la seconde parabole P'. Ces équations sont par suite

$$(7) \qquad my - x - (mb + a)\frac{1 - m^2}{1 + m^2} = 0$$

pour l'axe, et

$$(8) \qquad y - mx = 0$$

pour la directrice.

2° Le lieu du point de concours des droites (5) et (6), qui sera évidemment le même que le lieu du point de concours de (7) et (8), s'obtiendra en éliminant m entre (5) et (6), par exemple. La valeur de m tirée de (6) et portée dans (5) conduit à l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)(ax - by).$$

C'est une courbe du quatrième degré, fermée, ayant un point triple à l'origine, et pour tangentes en ce point les bissectrices de l'angle des axes et la droite

$$y = \frac{a}{b}x.$$

3° Pour avoir le lieu du point de concours des axes, il faut éliminer m entre les équations (5) et (7).

Pour cela, résolvons d'abord ces équations par rapport à x et y ; elles deviennent

$$x = \frac{1 - m^2}{(1 + m^2)^2}[2mb + a(1 - m^2)],$$

$$y = \frac{1 - m^2}{(1 + m^2)^2}[b(1 - m^2) - 2ma].$$

On en déduit les relations

$$x^2 + y^2 = \frac{(1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2}(a^2 + b^2),$$

$$ax + by = \frac{(1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2}(a^2 + b^2),$$

qui montrent que l'on a

$$x^2 + y^2 = ax + by,$$

ce qui indique que le lieu demandé est le cercle décrit sur $O\omega$ comme diamètre.

Il est à remarquer que l'énoncé parle à tort d'un second cercle, comme lieu du point de concours des axes.

4° Déterminons les coordonnées du foyer par cette condition qu'il est le pôle de la directrice.

L'équation de la polaire d'un point (x_1, y_1) de la parabole (3) est

$$\begin{aligned}x[m(y_1 + mx_1) - m(ma - b)]\\ + y[y_1 + mx_1 + ma - b]\\ + (ma - b)(y_1 - mx_1) + (ma - b)^2 = 0.\end{aligned}$$

Identifions cette équation avec l'équation (6) de la directrice : nous avons alors

$$y_1 - mx_1 + ma - b = 0.$$

$$\frac{m[y_1 + mx_1 - ma + b]}{-1} = \frac{y_1 + mx_1 + ma - b}{m}.$$

Ces deux relations peuvent s'écrire

$$y_1 - mx_1 = b - ma.$$

$$y_1 + mx_1 = (ma - b)\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1};$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = \frac{m(ma - b)}{m^2 + 1}, \qquad y_1 = -\frac{ma - b}{m^2 + 1}.$$

Telles sont les coordonnées du foyer de la parabole P.

On trouverait de même, pour celles du foyer de la parabole P′,

$$x_2 = \frac{a + mb}{m^2 + 1}, \qquad y_2 = \frac{m(a + mb)}{m^2 + 1}.$$

Par suite, on a pour la distance D des deux foyers

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2 + b^2,$$

ce qui indique que cette distance est constante et égale à $O\omega$.